Integral Calculus

+2 LEVEL

Dr. Arnab Chakraborty

Assistant Professor
Indian Statistical Institute, Kolkata

Formerly

Guest Faculty
Ramakrishna Mission Vidyamandira, Belur

⋄

Guest Faculty
Ramakrishna Vivekananda University, Belur

⋄

Assistant Professor
St. Xavier's College, Kolkata

Levant Publications
18-B, Shyamacharan De Street
Kolkata 700 073

সূচী

ছাত্রছাত্রীদের প্রতি

এটা আমাদের plus two level সিরিজের তৃতীয় বই। প্রথম বইটা ছিল Permutation and Combination আর দ্বিতীয়টা Differential Calculus. আমরা Differential Calculus বইটায় ক্যালকুলাস শেখা শুরু করেছিলাম, এই বইটা তারই পরবর্তী ধাপ। আমাদের সিরিজের বই যারা পড়েছ, তারা এই সিরিজের মূল কথাটা জানোই--

- Plus two level-এ খালি একটা বোর্ডের সিলেবাসের কথা মাথায় রাখলে চলে না। বিভিন্ন পরীক্ষা বিভিন্ন দিকে জোর দেয়। Competitive পরীক্ষার প্রশ্নগুলো মাঝে মাঝেই সব সিলেবাসের বেড়া পার করে দেয়, কী করে যে কষতে হবে বোঝাই যায় না। আমাদের plus two level সিরিজের বইগুলো পাঠ্যবিষয়ের এই বিশাল বিস্তারের কথা মাথায় রেখে লেখা। একেবারে গোড়ার ধারণাগুলো থেকে শুরু করে পাঁচ বছরের JEE আর ISI-এর B.Stat/B.Math-এর প্রশ্নগুলো পর্যন্ত বিশদ আলোচনা করা হয়েছে এখানে।

- অংক জিনিসটা ইংরাজিতে শেখাই ভালো। পরবর্তীকালে যে সব বই পড়তে হবে, সেগুলো তো সব ইংরাজিতেই লেখা। তাছাড়া যেসব competitive পরীক্ষায় বুঝিয়ে লিখতে হয়, বা interview-তে উত্তর দিতে হয়, তখনও ইংরাজিই ভরসা। কিন্তু তা বলে পাঠ্যবইয়ের যাবতীয় বোঝানোগুলোও যদি ইংরাজিতেই থাকে, তবে অধিকাংশ বাঙালী ছাত্রের পক্ষেই সেটা সহজ হয় না, তখন না বুঝে মুখস্থ করা ছাড়া পথ থাকে না। ইংরাজি আর অংকের এই দুস্তর ব্যবধানের উপর সেতুবন্ধনের জন্য এই বইতে বোঝানোগুলো সব বাংলায় রাখা হয়েছে, যদিও অংকগুলো সবই ইংরাজিতে।

Plus two level-এ যতরকম অংকের জিনিস শিখতে হয়, তার মধ্যে integral calculus জিনিসটা অনেকেরই কাছে বেশ ভয়ের ব্যাপার। এদিকে এটা বাদ দিয়ে গেলেও চলে না। কারণ অংকের ছাত্রদের পক্ষে তো বটেই, engineering, physics, statistics ইত্যাদির ছাত্রদের জন্যও integration এক অপরিহার্য হাতিয়ার, এবং বিষয়টার গভীরতাও সিলেবাসের অন্য অনেক কিছুর থেকেই বেশী। দুঃখের ব্যাপার এই যে, বাজারে প্রচলিত বইগুলোতে গাদা গাদা অংক থাকে বটে, কিন্তু বোঝানো থাকে খুবই কম। অনেক কিছুই সব শর্ত উল্লেখ না করে গোঁজা দিয়ে করা হয়। অথচ এই শর্তগুলো বাস্তব প্রয়োগে তো বটেই, এমনকি competitive পরীক্ষাগুলোতেও অনেক সময়ে ছাত্রদের ঝামেলায় ফেলে দেয়। সেই সব নিয়েও সহজ ভাষায় আলোচনা করা হয়েছে এখানে।

পুরো বইটাকে Day 1, Day 2,... এইভাবে ভেঙে সাজানো আছে। একদিনের পড়া হিসেবে যতটা দিয়েছি, তার চেয়ে বেশী একদিনে করতে গেলে মাথা গুলিয়ে যেতে পারে। MCQ-এর জমানায় পরীক্ষায় গুছিয়ে অংক লেখার চাহিদা কমে গেছে। কিন্তু তাও অংক গুছিয়ে লিখতে পারাটা দরকারী। সেগুলো handwriting-এ লিখে দিয়েছি। আর MCQ ঠাকুরের ফাঁকিবাজি নৈবেদ্যেরও হদিশ আছে কিছু।

বইটাকে যথাসম্ভব ত্রুটিমুক্ত রাখতে চেষ্টা করেছি। কিন্তু কিছু ভুলচুক তাও ঢুকেই পড়ে। ভুল ত্রুটি যা চোখে পড়বে সেগুলো এই ওয়েবপেজে দিয়ে দেবার চেষ্টা করব--

`http://www.isical.ac.in/∼arnabc/intcal/`

তোমাদেরও কিছু জানাবার থাকলে ওই পেজে লিখে দিতে পারবে। তাছাড়া যোগাযোগ করার জন্য arnabc74gmail.com বা 9231542600 ব্যবহার করতে পারো। এমনি ফোনের থেকে Whatsapp করলেই বেশী সুবিধা হয়। তবে হ্যাঁ, আমি কিন্তু বাপু প্রাইভেটে পড়াই না। ওই অনুরোধ জানিয়ে ফোন করলে হতাশ হবে।

--অর্ণব চক্রবর্তী

Chapter I
Indefinite integration

DAY 1
গোড়ার কথা

এই বইয়ের বিষয়বস্তু হল **integration** বলে একটা জিনিস। মনে করতে পারো যেন calculus শেখার দ্বিতীয় ধাপ এটা। প্রথম ধাপটা ছিল **differentiation**. এই বইতে তাই আমরা ধরে নেব যে, তুমি মোটামুটিভাবে differentiation-এর ব্যাপারটা জানো, ভীষণ খুঁটিনাটিগুলো মনে না থাকলেও চলবে। ঠিক কতটুকু মনে রাখতে হবে, সেটা আগে বলে নিই।

1.1 আগে যা ঘটেছে

Differentiation-এর অংকগুলোতে একটা function দেওয়া থাকত $f(x)$, সেটাকে **differentiate** করে আরেকটা function বানাতে হত, যাকে বলে $f(x)$-এর **derivative**. লেখার সময়ে লেখে $f'(x)$ বা $\frac{df(x)}{dx}$. জিনিসটার একটা limit-টিমিটওয়ালা খটোমটো সংজ্ঞা আছে, কিন্তু সরাসরি সেইটা ব্যবহার না করেই derivative বার করার নানারকম কায়দা ছিল। সেগুলো মনে করিয়ে দিই প্রথমে।

1.1.1 Derivative বার করার কায়দা

প্রথম কায়দা হল মুখস্থবিদ্যা! না, আঁতকে উঠো না। যতই আমরা কন্সেপ্ট-টন্সেপ্ট নিয়ে বড় বড় বুলি আওড়াই না কেন, সকলেই ভিতরে ভিতরে নীচের তালিকাটা মুখস্থ করে রাখে--

$f(x)$	$f'(x)$
x^a	ax^{a-1}
e^x	e^x
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$

চাইলে তালিকাটা আরো বড় করা চলত। কিন্তু আপাততঃ এটুকু খেয়াল রাখলেই কাজ হবে।
অনেক সময়ে কিছু সহজ function জুড়ে জটিলতর function তৈরী করা হয়, যেমন $f(x) = e^x$ আর $g(x) = \sin x$-কে জুড়ে $f(x) + g(x) = e^x + \sin x$, $f(x)g(x) = e^x \sin x$, বা $f(g(x)) = e^{\sin x}$ ইত্যাদি বিভিন্ন function বানানো যায়। এইরকম function-দের differentiate করার জন্য কয়েকটা সূত্র ছিল। সেগুলো মনে করিয়ে দিই। যদি $f(x)$ এবং $g(x)$ দুজনেই differentiable হয়, তবে--

- $f(x) \pm g(x)$-এর derivative হল $f'(x) \pm g'(x)$.
- $f(x)g(x)$-এর derivative হয় $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- $\frac{f(x)}{g(x)}$-এর derivative হবে $\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

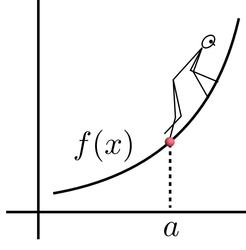


Fig 1

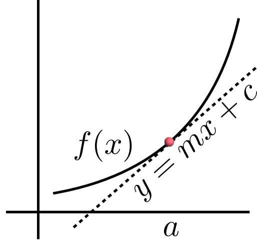


Fig 2

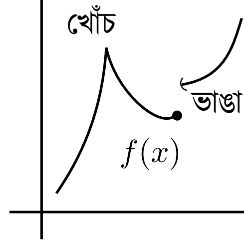


Fig 3

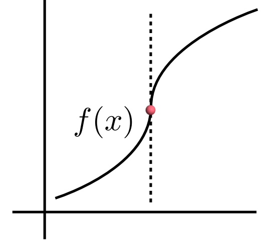


Fig 4

- $f(g(x))$-কে differentiate করলে পাবে $f'(g(x))g'(x)$.

এগুলো যদি একটু একটু ভুলে গিয়ে থাকো, তবে নীচের অংকটা করে স্মৃতিটাকে জাগিয়ে নাও।

Exercise 1: Differentiate করো--

1. $\sin(\cos x)$.
2. $\frac{\log x}{\sin(e^x)}$.
3. $\cot x$ (দুভাবে করো, একবার $\frac{\cos x}{\sin x}$ হিসেবে, আরেকবার $\frac{1}{\tan x}$ হিসেবে)।
4. $\frac{2x+3}{3x^2-4x+1}$.

■

1.1.2 ছবি দিয়ে ভাবা

ধরো একটা function দেওয়া আছে, $f(x)$. তবে কোনো $x = a$-তে $f(x)$-এর derivative (অর্থাৎ $f'(a)$) মানে হল ওইখানে $f(x)$-টা কী হারে বাড়ছে। ছবি দিয়ে ভাবলে, ওখানে গ্রাফটা কতটা খাড়া, অর্থাৎ কিনা যদি একটা লোক Fig 1-এর মত করে গ্রাফটার ওই বিন্দুতে দাঁড়িয়ে থাকে, তবে তার পায়ের নীচের মাটিটা তার কাছে কতটা চড়াই বলে মনে হবে। যদি মনে মনে ওখানে একটা **tangent** কল্পনা করো (Fig 2), এবং সেটাকে $y = mx + c$ আকারে লেখো, তবে m-টাই হল $f'(a)$. যদি গ্রাফটাতে কোথাও খোঁচ বা ভাঙা থাকে (Fig 3), তবে সেখানে tangent আঁকাই যাবে না, তাই ওইসব জায়গায় $f(x)$-টা differentiable-ও হবে না। আবার যদি কোথাও tangent-টা vertical হয়ে যায় (Fig 4), তবে তাকে $y = mx + c$ আকারে লেখাই যাবে না, তাই সেরকম জায়গাতেও $f(x)$-টা differentiable হবে না।

1.1.3 Limit দিয়ে বোঝা

অংকের ভাষায় differentiation-এর সংজ্ঞাটা দেওয়া হয় limit ব্যবহার করে। যদিও সেই সংজ্ঞাটা খুব একটা দরকার হবে না এই বইতে, তাও একবার লিখে রাখি। ধরো $f(x)$ দেওয়া আছে, আর তোমার কাজ হল কোনো $x = a$-তে তাকে differentiate করা। তার মানে আসলে এই limit-টা বার করা--

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

এই limit-টা যদি একটা সংখ্যা হয় (অর্থাৎ exist করে, এবং $-\infty$ বা ∞ না হয়ে যায়), তবেই আমরা বলি যে $f(x)$-টা $x = a$-তে differentiable, এবং এই limit-টাকেই $f'(a)$ বলি।
এই সংজ্ঞাটা তোমার অজানা হওয়ার কথা নয়। কিন্তু এখানে অনেক সময়ে একটা সামান্য প্যাঁচ করা হয়। ব্যাপারটা একটা উদাহরণ দিয়ে বোঝা যাক।

Example 1: প্রথমে $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ নাও, যেখানে $f(x) = |x|$. গ্রাফটা দেখিয়েছি Fig 5-এ। সংজ্ঞা ব্যবহার করে পরীক্ষা

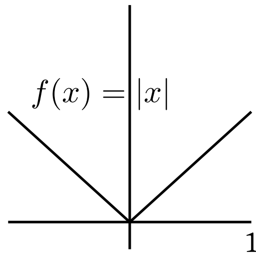


Fig 5

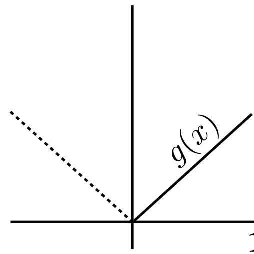


Fig 6

করে দ্যাখো, এটা $x = 0$-তে differentiable হচ্ছে কি না। এবার $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ নাও[1], এখানেও $g(x) = |x|$. এবার বলো তো $g(x)$ কি $x = 0$-তে differentiable?

SOLUTION: আমরা যে সংজ্ঞাটা দিয়েছি সেটা অক্ষরে অক্ষরে পালন করতে হলে

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

বার করা দরকার। এই limit-টাকে দুটো limit-এ ভেঙে বার করা যাক--

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ আর } \lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

এখানে left hand limit-টা হল -1, আর right hand limit-টা হল 1. যেহেতু ওরা অসমান, তাই আমরা বলব $f(x)$-টা $x = 0$-তে differentiable নয়। Fig 5 দেখলে বুঝতে পারবে $x = 0$-তে গ্রাফটায় একটা খোঁচ আছে।
একইভাবে $g(x)$-এর বেলায় limit-দুটো হল

$$\lim_{x\to 0-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \text{ আর } \lim_{x\to 0+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}.$$

এখানে left hand limit-টা undefined (যেহেতু $x < 0$ হলে $g(x)$-ই undefined), আর দ্বিতীয়টা এখানেও 1. সুতরাং সংজ্ঞা ধরে এগোলে আমরা বলতে বাধ্য যে $g(x)$-ও $x = 1$-এ differentiable নয়।
অথচ ভেবে দ্যাখো, $x \in [0, 1]$ হলে $|x|$ তো আসলে x-ই। যদি খালি $g(x)$-এর গ্রাফটা কল্পনা করো (Fig 6), তবে তার মধ্যে কোথাও কোনো খোঁচও চোখে পড়ছে না। তাই খুবই বলতে ইচ্ছে করছে যে $g(x)$-টা $x = 0$-তে differentiable. আসলে যেটা বলা উচিত, সেটা হল $g(x)$-টা $x = 0$-তে **right differentiable**. একই যুক্তিতে $g(x)$ হল $x = 1$-এ **left differentiable**. ■

অনেক সময়েই দেখবে লোকে এত সূক্ষ্মভাবে না লিখে খালি লিখে দিয়েছে

> সংক্ষেপে বলিতে গেলে হিং টিং ছট্!
>
> --রবীন্দ্রনাথ ঠাকুর

$g(x)$ is differentiable on $[0, 1]$.

তখন তোমাকেই বুঝে নিতে হবে যে, দুই প্রান্তে একপেশে differentiability-র কথা হচ্ছে। অবশ্য আমরা যদি খালি $(0, 1)$ নিয়ে কাজ করতাম, তবে এত কিছু ভাবতে হত না, কারণ তাহলে প্রান্ত দুটো set-এর বাইরে থাকত।
আমাদের differentiation-এর পাঁচালী প্রায় শেষ, আর খালি একটা জিনিস বলা বাকি। তার নাম **mean value theorem**.

1.1.4 Mean value theorem

এই theorem-টা সামান্য কঠিন। প্রমাণটা আমাদের কাজে লাগবে না। খালি জিনিসটা কী, সেটুকু মনে রাখলেই হবে--

[1] পাছে না জানো বা ভুলে গিয়ে থাকো, তাই বলে রাখি--এখানে $[0, 1]$ মানে যাবতীয় $0 \le x \le 1$-এর set. যদি লেখা দ্যাখো $(0, 1)$, তবে বুঝবে যাবতীয় $0 < x < 1$-এর set.

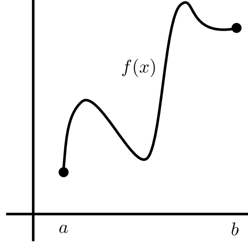


Fig 7

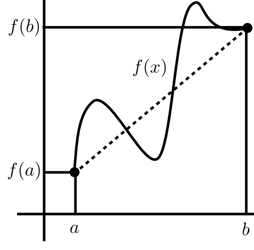


Fig 8

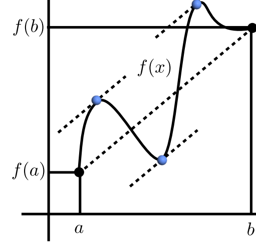


Fig 9

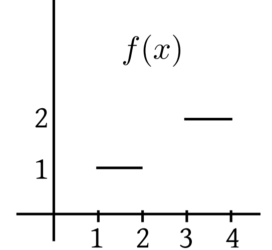


Fig 10

Lagrange's mean value theorem

If $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is continuous over $[a, b]$ and differentiable over (a, b), then there must exist some $c \in (a, b)$ such that

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

ব্যাপারটা ধাপে ধাপে ছবি দিয়ে ভাবলে মনে রাখতে সুবিধা হবে। প্রথমে $f(x)$-এর গ্রাফটা ভাবো (Fig 7)। এর দুই প্রান্ত যদি একটা লাইন টেনে যোগ করো (Fig 8-এ ড্যাশ্‌ড্যাশ্‌ লাইনটা), তবে তার slope হবে $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. আমাদের theorem-টা বলছে যে, এমন অন্ততঃ একটা বিন্দু পাওয়া যাবে, যেখানে tangent-টা এই ড্যাশ্‌ড্যাশ্‌ লাইনটার সঙ্গে সমান্তরাল হবে। Fig 9-এ এরকম তিনটে বিন্দু দেখিয়েছি।
এই theorem-টা এই বইতে খালি দুবার কাজে লাগবে। প্রথমটা এখনই বলে রাখি। দ্বিতীয়টা যথাসময়ে আসবে। আমরা জানি যে constant function-দের derivative হয় 0. এর উল্টোটাও কি ঠিক? মানে যদি $f'(x) \equiv 0$ হয়, তার মানেই কি $f(x)$-কে একটা constant function হতেই হবে? উত্তর হল--না। যেমন ধরো নীচের function-টা--

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in (1, 2) \\ 2 & \text{if } x \in (3, 4) \end{cases} .$$

গ্রাফটা দেখে নাও Fig 10-এ। যেহেতু গ্রাফটা সর্বত্রই horizontal, তাই derivative-টাও সর্বত্র 0 হতে বাধ্য। কিন্তু দেখতেই পাচ্ছ যে, $f(x)$-টা মোটেই constant নয়, কোথাও 1, আবার কোথাও 2.
এখানে $f(x)$-এর domain-টা হল $(1, 2) \cup (3, 4)$, যেটা দুটো interval মিলে তৈরী, যাদের মধ্যে খানিকটা ফাঁক আছে। সেই জন্যই এরকম function হতে পারল। যদি তা না হয়ে, domain-টা খালি একটা interval হত, তবে কিন্তু এরকম function অসম্ভব। মানে, যদি I কোনো একটা interval হয়, আর $f : I \to \mathbb{R}$ হয়, তবে $f'(x) \equiv 0$ হলে $f(x)$-কে constant হতেই হবে! এই কথাটা প্রমাণ করতেই mean value theorem-টা লাগবে। প্রথমে কথাটাকে গুছিয়ে লিখে নিই।

Theorem

Let I be an interval, and let $f : I \to \mathbb{R}$ have $f'(x) \equiv 0$. Then $f(x)$ must be a constant function.

Proof: প্রমাণটা হবে contradiction দিয়ে--

> Let, if possible, $f : I \to \mathbb{R}$ be not a constant function.

যেহেতু constant নয়, তাই এমন $a, b \in I$ পাবে, যাতে $f(a) \neq f(b)$ হয়।

> Let $a, b \in I$ be such that $f(a) \neq f(b)$.

এবার আমরা $[a, b]$-র উপরে mean value theorem লাগাতে চলেছি। তার জন্য ওই theorem-টার শর্তগুলো পরীক্ষা করে দেখতে হবে। দুটো শর্ত ছিল, $[a, b]$-র উপরে continuous, আর (a, b)-র উপরে differentiable. তা, এখানে পুরো I-এর উপরেই differentiable দেওয়া আছে, সুতরাং $[a, b] \subseteq I$ হওয়ায় শর্ত দুটো পালিত হবেই--

> Then $\because [a, b] \subseteq I$, hence $f(x)$ is continuous on $[a, b]$ and differentiable on (a, b).
> $\therefore$ By the mean value theorem,
>
> $$\exists c \in (a, b) \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \neq 0 (\Rightarrow\Leftarrow \because f'(x) \equiv 0).$$

ওই $\Rightarrow\Leftarrow$ মানে হল contradiction, অর্থাৎ যা শর্ত দেওয়া ছিল, তার সাথে কোনো বিরোধ বেঁধেছে। যেমন এখানে দেওয়া ছিল $f'(x)$ সর্বত্রই শূন্য, অথচ কোথা থেকে একটা c এসে উপস্থিত যেখানে নাকি $f'(c) \neq 0$. সুতরাং আমরা ওই যে গোড়ায় ধরে নিয়েছিলাম $f(x)$-টা constant নয়, সেটা হতে পারে না। **[Q.E.D]**

এই আমাদের differentiation-এর পাঁচালী শেষ হল। যদি এই সব জিনিসগুলো আরেকবার ঝালিয়ে নিতে চাও, তবে আমাদের বাংলায়-বোঝানো-ইংরাজি-বই সিরিজের Differential Calculus বইটা দেখে নিতে পারো।
ব্যস্, টিভি সিরিয়ালে যেমন "আগে যা ঘটেছে" বলে নেয়, আমরাও সেরকম বলে নিলাম। আর সেই সঙ্গে বাংলায়-বোঝানো-ইংরাজি-বই সিরিজের বিজ্ঞাপনের সুবাদে একটু কমার্শিয়াল ব্রেকও হয়ে গেল। এবার তবে আসল আলোচনা শুরু করা যাক।
Integration জিনিসটা দুইরকমের হয়--**indefinite integration** আর **definite integration**. এদের মধ্যে প্রথম জিনিসটা শিখব এই অধ্যায়ে, আর দ্বিতীয়টা শিখব পরের অধ্যায়ে। Indefinite integration-এর পিছনে মূল ধারণাটা হল **antiderivative**. সেটা শেখা দিয়েই শুরু করা যাক।

1.2 Antiderivative

Antiderivative নামটা শুনেই বুঝতে পারছ জিনিসটা derivative-এর উল্টো একটা কিছু। সংজ্ঞাটা এইরকম--আমরা কোনো $F(x)$-কে কোনো $f(x)$-এর একটা antiderivative বলব, যদি $F'(x) = f(x)$ হয়। অর্থাৎ--

"$f(x)$ হল $F(x)$-এর derivative" আর "$F(x)$ হল $f(x)$-এর একটা antiderivative"

এই দুটো বাক্যই সমার্থক। ব্যাপারটা অনেকটা square-এর উল্টো যেমন square root, সেইরকম। 2-এর square হল 4. অতএব 4-এর একটা square root হল 2. লক্ষ করো 2-এর square অবিসংবাদিতভাবে 4, কিন্তু 4-এর square root বার করার সময়ে লিখেছি একটা square root, কারণ 4-এর অন্য square root-ও সম্ভব (-2)। তেমনি, $f(x)$ যদি differentiable হয়, তবে তার একটাই derivative হয়, কিন্তু একই function-এর একাধিক antiderivative থাকতে পারে। সেই কারণেই antiderivative-এর বেলায় একটা antiderivative বলা হয়েছে।

Example 2: $\cos x$-এর একটা antiderivative বার করো।

SOLUTION: এখানে এমন একটা function চাওয়া হচ্ছে, যার derivative হল $\cos x$. একটা উত্তর তো অবশ্যই $\sin x$. আরেকটা উত্তর হল $1 + \sin x$. বস্তুতঃ যেকোনো $c + \sin x$-ই একটা উত্তর হবে, যেখানে c একটা constant. ■

Exercise 2: Find an antiderivative of each of the following functions.

(i) $\sin x$, (ii) $3x^2$, (iii) e^x, (iv) $-\frac{1}{x^2}$, (v) $\sec^2 x$.
■

যেহেতু antiderivative-এর ধারণাটা derivative-এর ধারণাটাকে উল্টে পাওয়া, তাই derivative বার করার কায়দাকানুনগুলোকে উল্টে antiderivative বার করার কায়দাকানুন তৈরী করা যায়। যেমন ধরো, আমরা জানি যে $f(x)+g(x)$-এর derivative হল $f'(x)+g'(x)$. ঘুরিয়ে বললে $f'(x)+g'(x)$-এর একটা antiderivative হল $f(x)+g(x)$. এদিকে $f(x)$ হল $f'(x)$-এর একটা antiderivative এবং $g(x)$ হল $g'(x)$-এর একটা antiderivative. সুতরাং যদি দুটো function-এর যোগফলের antiderivative বার করতে বলে, তবে function-দুটোর আলাদা করে antiderivative বার করে তাদের যোগ করে দিলেই চলছে। এই কায়দাটাই ব্যবহার করব নীচের অংকটায়।

Example 3: $e^x+\sin x$-এর একটা antiderivative বার করো।

SOLUTION: e^x-এর একটা antiderivative হল e^x নিজেই। আর $\sin x$-এর একটা antiderivative হচ্ছে $-\cos x$. সুতরাং $e^x+\sin x$-এর একটা antiderivative হবে $e^x-\cos x$. ■

একইরকম ব্যাপার বিয়োগের ক্ষেত্রেও খাটবে।

Exercise 3: Antidifferentiate:

1. $\sin x+\cos x$
2. $3x^2+2x$
3. $\frac{1}{x}-1,\ x>0$
4. $4x^3+e^x-\frac{1}{x},\ x>0$
5. $29-e^{-x}$

■

আমরা জানি যে, $2f(x)$-এর derivative হল $2f'(x)$. এটাকে উল্টে একটা antiderivative-এর সূত্র বানিয়ে ফেলা যাক--যদি $f(x)$-এর একটা antiderivative হয় $F(x)$, তবে $2f(x)$-এর একটা antiderivative হবে $2F(x)$. শুধু 2 বলেই নয়, যেকোনো constant-এর বেলাতেই একই ব্যাপার--

> If $f(x)$ has an antiderivative $F(x)$, and α is any number, then $\alpha f(x)$ has an antiderivative $\alpha F(x)$.

Example 4: $x+x^3$-এর একটা antiderivative বার করো।

SOLUTION: প্রথমে x-এর antiderivative বার করা যাক। আমরা জানি $2x$-এর একটা antiderivative হল x^2.
অতএব $x=\frac{1}{2}\times 2x$-এর একটা antiderivative হবে $\frac{1}{2}x^2$.
একইভাবে, $x^3=\frac{1}{4}\times 4x^3$-এর একটা antiderivative হবে $\frac{1}{4}x^4$.
দুটো মিলিয়ে $x+x^3$-এর একটা antiderivative হচ্ছে $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4$. ■

Exercise 4: Antiderivative বার করো--

1. $1 + 3x - 29x^2 + 4x^6$.
2. $\frac{10}{x^2} + 2\cos x - \frac{1}{x}$.
3. $\frac{2+3x+x^2}{x^3}$.
4. $\sin(x + 1)$.

HINT: শেষেরটার বেলায় $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$ ফর্মুলাটা কাজে লাগতে পারে।
■

আমরা শিখেছি যে, $f(2x + 3)$-এর derivative হল $2f'(2x + 3)$. সেটাকে উল্টে পাওয়া যায় antiderivative-এর এই সূত্রটা--যদি $f(x)$-এর একটা antiderivative হয় $F(x)$, তবে $f(2x+3)$-এর একটা antiderivative হবে $\frac{1}{2}F(2x+3)$. ভালো করে বুঝে নাও, f-এর পেটের ভিতরে ছিল $2x + 3$. সেই 2-টা উল্টে $\frac{1}{2}$ হয়ে গেল।
ব্যাপারটাকে একটু গুছিয়ে লিখে রাখি--

THEOREM

If $f(x)$ has an antiderivative $F(x)$, then $f(ax + b)$ has an antiderivative $\frac{1}{a}F(ax + b)$. Here we assume $a \neq 0$.

এই সূত্রের অজস্র প্রয়োগ, যেমন নীচের অংকটায়।

Example 5: $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$-এর একটা antiderivative বার করো।

SOLUTION: আমরা জানি $\sin x$-এর একটা antiderivative হল $-\cos x$. অতএব আমাদের সূত্রটা লাগালে $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$-এর একটা antiderivative পেয়ে যাচ্ছি $-\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. ■

Exercise 5: একটা করে antiderivative বার করো--

1. $\sin(2 - x)$.
2. $(2 - 3x)^{100}$.
3. $\frac{1}{1+x}$.
4. $\cos\left(\frac{x}{2} - 3\right)$.

■

Exercise 6: আমরা জানি $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$. এদিকে $\cos x$-এর একটা antiderivative হল $\sin x$. এবার আমাদের সূত্রটা দিয়ে $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$-এর antiderivative বার করে দ্যাখো তো $\sin x$-ই পাও কিনা। ■

DAY 2
Indefinite integral

আমরা আগেই দেখেছি যে, একটা function-এর একাধিক antiderivative থাকা সম্ভব। যেমন, $c + \sin x$ জাতীয় সব function-ই $\cos x$-এর এক্কেকটা antiderivative.
কোনো function-এর যাবতীয় antiderivative-এর set-কে বলে সেই function-টার **indefinite integral**. যদি function-টাকে $f(x)$ লিখি, তবে তার indefinite integral-কে লেখে $\int f(x)dx$. লেখার কায়দাটা লক্ষ করো। প্রথমে একটা লম্বাটে S-এর মত চিহ্ন, তারপর function-টা, এবং সবশেষে dx. ওই d অক্ষরটাই লিখতে হবে। তবে x-টা হল তোমার variable-এর নাম, চাইলে তুমি ওর বদলে t, y বা অন্য কিছুও লিখতে পারো, খালি সেক্ষেত্রে তোমার function-টার পেটেও ওই একই variable লিখতে ভুলো না, যেমন $\int f(t)\,dt$ বা $\int f(y)\,dy$. যেহেতু variable-টার নামটার কোনো গুরুত্ব নেই, তাই লোকে ওটাকে অনেক সময়ে **dummy variable**[2] বলে। আর $f(x)$-টাকে বলে **integrand**. যেমন $\int \sin x\,dx$-এ integrand-টা হল $\sin x$.
এবার আমরা দেখব কোনো $f(x)$ দেওয়া থাকলে কী করে $\int f(x)\,dx$ বার করতে হয়। একটা সহজ উদাহরণ নিয়ে শুরু করা যাক।

Example 6: ধরো $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ হল $f(x) \equiv 0$. তাহলে $\int f(x)dx$ বার করো। অর্থাৎ সেই সব <u>যাবতীয়</u> $F(x)$-এর set চাই, যাতে $\mathbb{R}$-এর সর্বত্রই $F'(x) = 0$ হয়।
SOLUTION: আমরা একটু আগেই শিখেছি যে, যদি I একটা interval হয়, আর $F : I \to \mathbb{R}$ এমন হয় যে $F'(x) \equiv 0$, তবে অবশ্যই $F(x)$-টা একটা constant function হতে বাধ্য। বিপরীতপক্ষে, $F(x)$ যদি একটা constant function হয়, তবে $F'(x) \equiv 0$ হবেই। সুতরাং $\int f(x)\,dx$ হল যাবতীয় constant function-দের set. ■

Example 7: $\int 2x\,dx$ বার করো, অর্থাৎ যাবতীয় $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$-এর set বার করো, যাতে $F'(x) = 2x$ হয়।

SOLUTION: চট্ করে চোখে দেখেই আন্দাজ করে ফেলেছ নিশ্চয়ই $F(x) = x^2$ হল একটা antiderivative. এবং এটাও বুঝতে পারছ $x^2 + c$ জাতীয় সব function-ই এক্কেকটা antiderivative. প্রশ্ন হল এর বাইরে আর কোনো antiderivative রয়ে গেল কিনা। এবার আমরা সেটাই পরীক্ষা করে দেখব। তার জন্য ধরো $F(x)$ হল $2x$-এর কোনো একটা antiderivative. আমরা পরীক্ষা করে দেখতে চাই $F(x)$-টা $x^2 + c$ জাতীয় হতে বাধ্য কিনা, মানে $F(x) - x^2$-টা একটা constant function হতে বাধ্য কিনা। এটার একটা নাম দেওয়া যাক, ধরো $G(x) = F(x) - x^2$. তাহলে $G'(x) = F'(x) - 2x \equiv 0$. তাই আমরা আগের অংকের যুক্তিতে বলতে পারি যে, $G(x)$ একটা constant function হতে বাধ্য, অতএব $F(x) = x^2 + c$ জাতীয় না হয়ে যায় না। সুতরাং--

$$\int 2x\,dx = x^2 + c,$$

যেখানে c হল একটা **arbitrary constant**. এই লেখার কায়দাটা দ্যাখো। এই যে arbitrary constant বললাম, এর মানেই আসলে একটা set বোঝাচ্ছি--

$$\int 2x\,dx = \{x^2 + c \;\;:\;\; c \in \mathbb{R}\}.$$

কেউ কেউ arbitrary constant-টাকে **constant of integration**-ও বলে থাকেন। ■

Exercise 7: Find the indefinite integrals of the following functions.

[2] সেই যেমন সিনেমায় ডামি থাকে, যারা নায়কের পোশাক পরে ভিলেনের হাতে মার খায়। লোকে নায়কের দুঃখে আকুল হয়, অথচ ডামি অভিনেতাটা মরে গেল কিনা সে খবরটুকুও রাখে না। এই variable-গুলোও সেরকমই আর কি!

1. $3x^2$,
2. e^x,
3. $\cos\left(\frac{x}{3}-4\right)$,
4. $3+56x-4x^2+3x^3$.

■

Exercise 8: The integral $\int \cos(\log_e x)\,dx$ is equal to (where c is a constant of integration)

(A) $\frac{x}{2}\big(\sin(\log_e x)-\cos(\log_e x)\big)+c$

(B) $\frac{x}{2}\big(\cos(\log_e x)+\sin(\log_e x)\big)+c$

(C) $x\big(\cos(\log_e x)+\sin(\log_e x)\big)+c$

(D) $x\big(\cos(\log_e x)-\sin(\log_e x)\big)+c$

(JEE(main)2019)

HINT:
আমরা এখনও শিখিনি, কী করে $\int \cos(\log_e x)\,dx$ বার করতে হয়। সেটা আমরা শিখব তৃতীয় অধ্যায়ের শেষের দিকে। কিন্তু যেটুকু শিখেছি, তা দিয়েই এই অংকটাকে ঘায়েল করা যায়। আমরা করব কি, যে চারটে option দিয়েছে, সেগুলোকে differentiate করে দেখব, কোন্‌টার derivative হয় $\cos(\log_e x)$. কাজটা খুব কঠিন মনে হতে পারে, কিন্তু আসলে চারটে option-ই খুবই একইরকম। তাই খালি এই দুটো derivative-ই কাজে লাগবে--

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x\sin\log x) &= \sin\log x+\cos\log x,\\ \frac{d}{dx}(x\cos\log x) &= \cos\log x-\sin\log x.\end{aligned}$$

এদের ব্যবহার করে এবার চারটে option-এর derivative বার করে দ্যাখো, কোন্‌টার বেলায় $\cos(\log_e x)$ আসে। তৃতীয় অধ্যায়ে যখন আমরা $\int \cos(\log_e x)\,dx$ বার করা শিখব, তখন দেখব যে সেইভাবে এগোলে সমাধানটা আরো লম্বা হয়ে যাবে। তাই এই MCQ-টা এরকম উল্টো পথে (মানে differentiation করে) করাই সুবিধাজনক।

■

2.1 Arbitrary constant নিয়ে কাজ করা

যখন আমরা লিখি

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c,$$

তার মানে কিন্তু আসলে

$$\int \cos x\,dx = \{\sin x + c \;:\; c\in\mathbb{R}\}.$$

অর্থাৎ $\int \cos x\,dx$ হল একটা set, যার প্রতিটা সদস্যের চেহারা হল এইরকম--

"$\sin x+$ কিছু একটা সংখ্যা"।

সুতরাং আমরা লিখতে পারি

$$2\int \cos x\, dx = 2\sin x + c.$$

লক্ষ করো, এখানে আমরা কিন্তু $2\sin x + 2c$ লিখি নি, কারণ "$\sin x+$ কিছু একটা সংখ্যা"-কে 2 দিয়ে গুণ করলে পাবে "$2\sin x+$ কিছু একটা সংখ্যা"। অংকের ভাষায়

$$\{2\sin x + c \ : \ c \in \mathbb{R}\} = \{2\sin x + 2c \ : \ c \in \mathbb{R}\}.$$

ব্যাপারটা ভালো করে বুঝে নাও, যদি আমরা $\mathbb{R}$-এর প্রতিটা সংখ্যাকে দ্বিগুণ করে তাদের set-টা নিই, তবে সেই $\mathbb{R}$-ই পাব। সেই কারণে যতই যাই করি না কেন, ওই arbitrary constant-টাকে পরিবর্তন করার প্রয়োজন বড়ো একটা হয় না। অবশ্য যদি তুমি

$$2\int \cos x\, dx = 2\sin x + 2c$$

লেখো, তাতেও কোনো মহাভারত অশুদ্ধ হবে না।

2.2 Domain যদি একটা interval না হয়

Arbitrary constant-টার জন্মের পিছনে mean value theorem-এর ভূমিকার কথা আগেই বলেছি। সেই theorem-এ একটা গুরুত্বপূর্ণ শর্ত ছিল এই যে, domain-টাকে একটা আস্ত interval হতে হবে, মাঝে কোনো ফাঁক থাকলে চলবে না। যেমন, যদি বলি $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$-এর derivative হল সর্বত্র 0, তবে অমনি তুমি জোর দিয়ে বলতে পারবে যে $f(x)$ একটা constant function হবেই। কিন্তু যদি f-এর domain-এর সামান্য একটাও ফুটো থাকে, তবে তোমার জোর সেই ফুটো দিয়ে তলিয়ে যাবে! যেমন $f:(-\infty,0)\cup(0,\infty)\to\mathbb{R}$ হলে $f'(x)\equiv 0$ হবার জন্য f-এর constant হবার দরকার নেই,

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & \text{if } x\in(-\infty,0) \\ c_2 & \text{if } x\in(0,\infty) \end{cases}$$

হলেও চলবে। ব্যাপারটা বুঝলে তো? Domain-টা যতগুলো আলাদা আলাদা interval মিলে তৈরী, তাদের প্রত্যেকের উপর আলাদা করে mean value theorem লাগানো যাবে, সেই কারণে তাদের প্রত্যেকের উপরে $f(x)$-কে একটা constant function হতে হবে। কিন্তু একটা interval-এর constant-এর সঙ্গে আরেকটা interval-এর constant-এর সমান হবার কোনো প্রয়োজন নেই।

সুতরাং আন্দাজ করতে পারছ যে, $\int f(x)\,dx$ বার করার সময়ে function-এর domain-টা যতগুলো ফাঁক ফাঁক interval দিয়ে তৈরী হবে, ঠিক ততগুলো arbitrary constant লাগবে। কিন্তু এইভাবে অনেকগুলো arbitrary constant লিখে বেড়ানো বিরক্তিকর। তাই অধিকাংশ বইতেই একটা প্রথা মেনে চলা হয়--

> যখনই কোনো function-এর indefinite integral বার করতে দেবে, আমরা ধরে নেব যে function-টা কোনো একটা interval-এর উপরে defined.

আমরা যেসব প্রচলিত function নিয়ে কাজ করি, তাদের প্রত্যেকেরই domain আমরা জানি। অনেক function-এর বেলায় domain-টা এমনিতেই একটা interval, যেমন x^2, $\sin x$, $\log x$ ইত্যাদি। এদের বেলায় এই প্রথাটা আপনেই পালিত হয়। কিন্তু যেসব function-এর domain একাধিক interval মিলে তৈরী, তাদের বেলায় একটু অসুবিধা হয়। এরকম কয়েকটা function-এর নমুনা দেখে নাও--

- $\frac{1}{x}$-এর domain হল $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.
- $\tan x$-এর domain হল $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2},\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)$.
- $\log(x^2-5x+6)$-এর domain হল $(-\infty,2)\cup(3,\infty)$, কারণ $x\in[2,3]$ হলে $x^2-5x+6\le 0$ হবে, তাই তার log নেওয়া যাবে না।

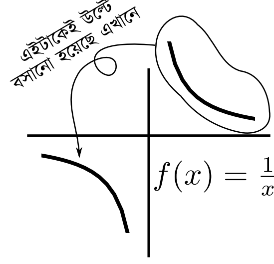


Fig 11

এরকম একটা function-এর indefinite integral বার করা দেখব এইবার।

Example 8: $\int \frac{dx}{x}$ বার করো। এখানে integrand-টা হল $\frac{1}{x}$.

SOLUTION: এখানে indefinite integral-এর সংজ্ঞা অনুযায়ী এগোলে আমাদের কাজ হল $f(x) = \frac{1}{x}$-এর যাবতীয় antiderivative বার করা। যেহেতু এখানে x-টা নীচের তলায় আছে, তাই $\frac{1}{x}$ দেখলেই আমাদের মনে যে domain-এর কথা আসে, সেটা হল যাবতীয় $x \neq 0$-র set, অর্থাৎ $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. এটা মোটেই একটা interval নয়, দুটো interval দিয়ে তৈরী, যাদের মধ্যে একটা বিন্দু ফাঁক আছে। এদিকে আমাদের প্রথা হল কোনো একটা interval-কে domain হিসেবে নেওয়া। সুতরাং আমরা চাইলে খালি $(-\infty, 0)$ নিয়ে কাজ করতে পারি, বা খালি $(0, \infty)$ নিয়ে কাজ করতে পারি। বা এদের থেকে ছোটো কোনো interval নিয়েও কাজ করা যায়, যেমন $(1, 2)$. যেহেতু এখানে কোনো বিশেষ interval বলে দেওয়া নেই, তাই আমাদের এমন একটা উত্তর বার করতে হবে, যেটা এরকম যেকোনো interval-এর ক্ষেত্রেই কাজ করে।
আমাদের পরিচিত derivative-দের তালিকা থেকেই জানি $\log x$ হল $\frac{1}{x}$-এর একটা antiderivative. কিন্তু সেটা খালি $x > 0$-র জন্যই। অতএব $(0, \infty)$-র উপর কাজ করলে এই উত্তরেই চলবে। কিন্তু যদি $(-\infty, 0)$-র উপরে কাজ করতে হয়? লক্ষ করো, $(-\infty, 0)$-র উপরে $f(x) = \frac{1}{x}$-এর গ্রাফটা তো খালি $(0, \infty)$-র উপরে $f(x)$-এর গ্রাফটাকে উল্টে বসিয়ে দিলেই পাওয়া যায় (Fig 11)। সুতরাং $g(x) = \log(-x)$ নিলেই সেটা $(-\infty, 0)$-র উপরে $\frac{1}{x}$-এর একটা antiderivative হবে। সেটা differentiate করলেই দেখতে পাবে--

$$g'(x) = \frac{1}{-x} \times (-1) = \frac{1}{x}.$$

এই দুটো কেসকেই আমরা একই ফর্মুলা দিয়ে প্রকাশ করতে পারি, $\log |x|$ লিখে। অতএব indefinite integral-টা হবে

$$\int \frac{dx}{x} = \log |x| + c, \text{ যেখানে } c \text{ একটা arbitrary constant.}$$

সাবধান, এই ফর্মুলাটা $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$-এর ভিতরে যেকোনো interval-এর উপরেই কাজ করে বটে, কিন্তু ভুল করে ভেবে বোসো না যেন যে, পুরো $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$-এর উপরেই কাজ করবে। যদি সত্যিই পুরো $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$-এর উপরে যাবতীয় antiderivative-এর set চাও, তবে দুটো interval-এর জন্য দুটো arbitrary constant লাগবে--

$$\begin{cases} \log(-x) + c_1 & \text{if } x < 0 \\ \log(x) + c_2 & \text{if } x > 0 \end{cases},$$

যেখানে $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. তবে ওই যে প্রথাটার কথা বললাম-- কেউই কখনো একাধিক interval-এর উপরে এক সঙ্গে কাজ করতে যায় না, তাই সর্বদা একটা arbitrary constant দিয়েই কাজ চলে যায়। ■

এবার তোমার নিজের করার জন্য কিছু অংক দিই।

Exercise 9: নীচের indefinite integral-গুলো বার করো।

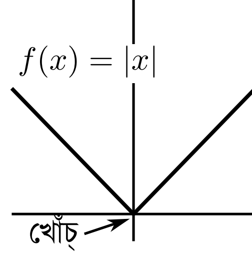


Fig 12

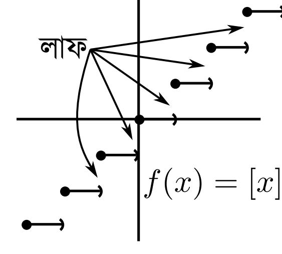


Fig 13

1. $\int 2 + 3x - 5x^2\, dx$
2. $\int \sin 2t + 3e^{-t}\, dt$
3. $\int \frac{dx}{2x+3}$
4. $\int \sin(2x - 9)\, dx$.

■

2.3 Antiderivative কি সবসময়েই থাকে?

আমরা জানি যে, সব function-কে differentiate করা যায় না, যেমন $|x|$-কে $x = 0$-তে differentiate করা যায় না (Fig 12)। স্বভাবতঃই প্রশ্ন ওঠে সব function-এরই antiderivative বার করা যায় কিনা। উত্তর হল--না, এমন বিস্তর function আছে, যাদের antiderivative হয় না, মানে যারা কোনো function-এর derivative হতে পারে না (যেমন আকবর বাদশা যতই চেষ্টা করুন না কেন, কারুর মা হতে পারবেন না)।

Example 9: $f(x) = [x]$-এর কোনো antiderivative আছে কি? এখানে $[x]$ মানে largest integer $\leq x$.

SOLUTION: না। একটা theorem আছে (কেউ কেউ তাকে **Darboux's theorem**[3] বলেন), যেটা বলে কোনো function-এর derivative-এর গ্রাফে কোথাও কোনো লাফ থাকতে পারে না। এই theorem-টা এই পর্যায়ে তোমাদের জানার কথা নয়[4]। আমাদের $f(x)$-এর গ্রাফে কিন্তু লাফ আছে (Fig 13)। তাই এর কোনো antiderivative থাকতে পারে না। ■

তোমরা যারা integral calculus-এর অন্য বই পড়েছ, বা বিভিন্ন competitive পরীক্ষার প্রশ্ন নিয়ে ঘাঁটাঘাঁটি করেছ, তারা এই অংকটা দেখে আঁতকে উঠে বলবে--অ্যাঁ, সেটা কী করে হয়, আমরা দেখেছি পরীক্ষায় $\int_3^6 [x]dx$-জাতীয় জিনিস বার করতে দেয়! ঠিক কথা, কিন্তু ওখানে লক্ষ করো $\int$-এর উপরে নীচে দুটো সংখ্যা লেখা আছে। ওটার অর্থ হল **definite integral** এবং তার ধর্ম আলাদা। আমরা পরের অধ্যায়েই ওদের নিয়ে কাজ করা শিখব, এবং তখন দেখব যে $\int_3^6 [x]dx$ সত্যিই বার করা যায়, যদিও $\int [x]dx$ বার করা যায় না!

কোনো function-এর antiderivative না থাকা নিয়ে বেশী দুশ্চিন্তা কোরো না। আপাততঃ খালি এটুকু মনে রাখলেই হবে যে, যদি $f(x)$ কোনো continuous function হয়, তবে তার antiderivative থাকবেই। কিছু কিছু discontinuous function-এর ক্ষেত্রেও antiderivative থাকে, কিন্তু তাদের নিয়ে মাথা না ঘামালেও এই বইতে চলবে। তবে যদি গ্রাফের মধ্যে কোথাও লাফ থাকে, তবে antiderivative কোনোভাবেই থাকতে পারে না।

Answers

[3] উচ্চারণ হল ডারবৌ।

[4] না, আমাদের বাংলায়-বোঝানো-ইংরাজি-বই সিরিজের Differential Calculus বইতেও এর উল্লেখ নেই, যদিও এই সিরিজের Real Analysis বইতে আছে।

1. (*i*) $-\cos(\cos x)\sin x$. (*ii*) $\frac{\sin(e^x)-xe^x\log x\cos(e^x)}{x\sin^2(e^x)}$. (*iii*) $-\operatorname{cosec}^2 x$. (*iv*) $\frac{-6x^2-18x+14}{(3x^2-4x+1)^2}$.
2. (*i*) $-\cos x$, (*ii*) x^3, (*iii*) e^x, (*iv*) $\frac{1}{x}$, (*v*) $\tan x$.
3. (*i*) $-\cos x+\sin x$ (*ii*) x^3+x^2 (*iii*) $\log x-x$ (*iv*) $x^4+e^x-\log x$ (*v*) $29x+e^{-x}$
4. (*i*) $x+\frac{3}{2}x^2-\frac{29}{3}x^3+\frac{4}{7}x^7$. (*ii*) $-\frac{10}{x}+2\sin x-\log x$. (*iii*) $\log x-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}$. (*iv*) $-\cos(x+1)$.
5. (*i*) $\cos(2-x)$. (*ii*) $-\frac{1}{303}(2-3x)^{101}$. (*iii*) $\log(1+x)$. (*iv*) $2\sin\left(\frac{x}{2}-3\right)$.
6. $-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times(-1)=\sin x$. **7.** (*i*) x^3+c. (*ii*) e^x+c. (*iii*) $3\sin\left(\frac{x}{3}-4\right)+c$.
(*iv*) $3x+28x^2-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4+c$.
8. (B). **9.** (*i*) $2x+\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{3}x^3+c$. (*ii*) $-\frac{1}{2}\cos 2t-3e^{-t}+c$. (*iii*) $\frac{1}{2}\log|2x+3|+c$.
(*iv*) $-\frac{1}{2}\cos(2x-9)+c$.

Chapter II
Definite integral

DAY 3
জিনিসটা কী? (part 1)

আমরা গত অধ্যায়ে কোনো function-এর antiderivative বার করা শিখেছি। স্বভাবতঃই প্রশ্ন জাগে, এটা দিয়ে কাজ কী হয়? বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় এর নানারকমের আশ্চর্য সব প্রয়োগ আছে। তার মধ্যে কয়েকটা প্রয়োগ এখানে শিখব। প্রথমটা হল area (ক্ষেত্রফল) বার করা। আমরা ছোটোবেলাতেই area বার করার কিছু ফর্মুলা শিখি, যেমন rectangle বা ত্রিভুজ বা circle-এর area. এই তিন ধরণের shape মিলিয়েজুলিয়ে অন্য shape বানালে তাদের area-ও যোগ করে বার করে দিতে পারি। যেমন নীচের উদাহরণে।

Example 1: Fig 1-এর শেড করা area-টা কত হবে?

SOLUTION: এটাকে আমরা Fig 2-এর মত কয়েকটা rectangle-এ ভেঙে ফেলতে পারি। এদের area-গুলো যোগ করে দিলেই পাব $1 \times 4 + 1 \times 3 + 1 \times 2 = 9$. ■

এবার ধরো তোমাকে $f(x) = x^2$-এর একটা গ্রাফ দিলাম Fig 3-এর মত। ছবিতে গ্রাফের নীচে খানিকটা জায়গা শেড্ করে দেখানো আছে। এর বাঁদিকের সীমানা হল $x = 1$ দিয়ে টানা vertical লাইনটা, এবং ডানদিকের সীমানা হল $x = 2$ দিয়ে টানা vertical লাইনটা। প্রশ্ন হল এদের মধ্যবর্তী জায়গাটার area কত হবে? কাজটা কিন্তু সহজ নয়। এই shape-টাকে বিভিন্ন rectangle বা ত্রিভুজে ভেঙে ফেলা যাচ্ছে না। বুঝতেই পারছ এইরকম বিভিন্ন shape-এর area বার করার প্রয়োজন হামেশাই হয়ে থাকে। যেমন ধরো, একটা ব্রীজ বানাতে নানারকম shape-এর জিনিস লাগে, তাদের area বার করতে না পারলে ব্রীজ বানাতে কত মালমশলা লাগবে, সেটা হিসেবই করা যাবে না! এরকম অবস্থায় আমাদের সহায় হবে antiderivative ব্যবহার করে একটা কায়দা। সেটাই ধাপে ধাপে শিখব এবার।

3.1 প্রথম ধাপ: continuous

প্রথমে যে ধরণের অঞ্চলের area বার করতে শিখব, সেটা দেখতে Fig 4-এর মত, এর ছাদটা কোনো একটা continuous function দিয়ে তৈরী, ধরো $f(x)$. মেঝেটা হল x-axis, আর দুপাশের দেওয়াল দুটো হল x-axis-এর যেকোনো দুটো

Fig 1

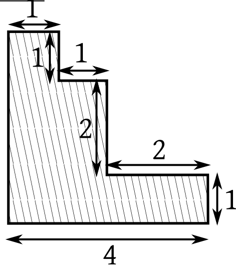


Fig 2

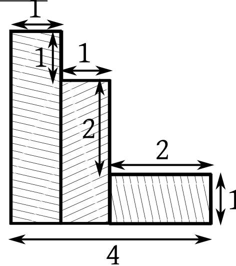


Fig 3

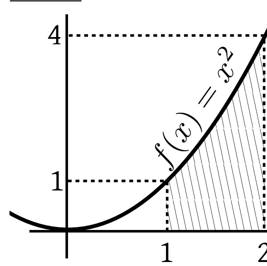
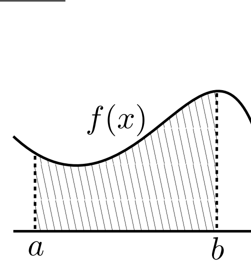


Fig 4



বিন্দু দিয়ে টানা vertical লাইন (ধরো $x = a$ আর $x = b$ দিয়ে, যেখানে $a < b$)। এই area-টাকে আমরা এই চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করব--

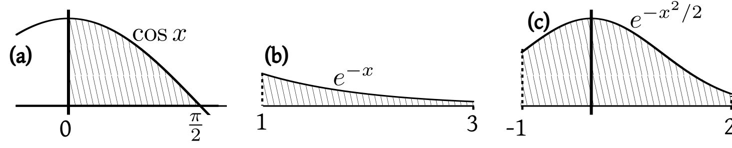
$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

একে বলে a থেকে b পর্যন্ত $f(x)$-এর **definite integral.** চেহারাটা ভালো করে চিনে রাখো--নীচে লিখেছি বাঁদিকের সীমানাটা, মানে a. উপরে লিখেছি ডানদিকের সীমানাটা, মানে b.
কিছু অংক করে এই চিহ্নটার সঙ্গে পরিচিত হয়ে নেওয়া যাক।

Example 2: একটু আগে আমরা Fig 3-এর শেড করা অঞ্চলটার area বার করার কথা বলছিলাম। সেটাকে definite integral আকারে লেখো।

SOLUTION: উত্তর হল $\int_1^2 x^2\,dx$. এখানে আমরা চাইলে x-এর বদলে অন্য কোনো variable-ও ব্যবহার করতে পারতাম, যেমন যদি t ব্যবহার করতাম, তবে লিখতাম $\int_1^2 t^2\,dt$. কিন্তু ওই 'd' অক্ষরটা লিখতেই হবে। ■

Exercise 1: নীচের area তিনটেকে definite integral দিয়ে প্রকাশ করো।



■

এইবার তবে $\int_a^b f(x)\,dx$ বার করার জন্য antiderivative-এর কায়দাটা বলি--

> প্রথমে $f(x)$-র যা খুশি একটা antiderivative নিতে হবে, $F(x)$. তাহলে area-টা হবে $F(b) - F(a)$.
> ব্যস্!

তোমাদের মধ্যে যারা একটু খুঁতখুঁতে, তারা হয়তো দুটো জিনিস নিয়ে দুশ্চিন্তায় পড়ে গেছ--

- যদি $f(x)$-এর কোনো antiderivative না থাকে, তবে কী হবে?
- যদি $f(x)$-এর একাধিক antiderivative থাকে, তবে তার মধ্যে কোন্‌টা নিতে হবে, বুঝব কী করে?

না, এই দুটো সমস্যা নিয়ে কোনো চাপ নিও না। কারণ--এক, $f(x)$-টা যেহেতু continuous, তাই antiderivative থাকবেই। দুই, যাই antiderivative নাও না কেন, উত্তরটা একই আসবে।
এবার হাতেকলমে একটা অংক কষে দেখা যাক।

Example 3: এই কায়দায় Fig 3-এর area-টা বার করো, মানে $\int_1^2 x^2\,dx$ বার করো।

SOLUTION: প্রথমে $f(x) = x^2$-এর একটা antiderivative নিতে হবে, $F(x)$. যা খুশি antiderivative নেওয়া যায়, যেমন ধরো $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ নিলাম। আমাদের area-টা $x = 1$ থেকে $x = 2$ অব্ধি বিস্তৃত। তাই উত্তরটা হবে

$$F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

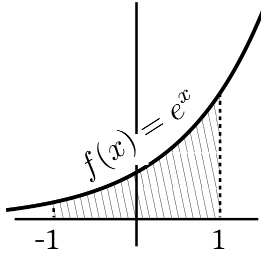


Fig 5

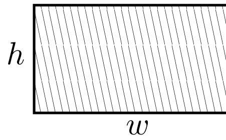


Fig 6

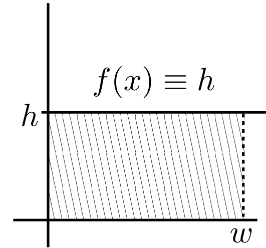


Fig 7

আমরা এটাকে সাধারণতঃ এইভাবে লিখে থাকি--

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 = \frac{2^3 - 1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

যদি অন্য কোনো antiderivative-ও নিতে, তাও একই উত্তর আসত। যেমন ধরো, যদি $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5$ নিতে, তবে $F(2) - F(1)$ বার করার সময়ে 5-টা কাটাকাটি হয়ে যেত। ■

আরেকটা উদাহরণ দেখা যাক।

Example 4: Fig 5-এর শেড করা জায়গাটার area বার করো।

SOLUTION: এখানে $f(x) = e^x$, যার একটা antiderivative হল $F(x) = e^x$ নিজেই। আমাদের শেড করা জায়গাটা $x = -1$ থেকে $x = 1$ অব্ধি। তাই উত্তর হবে

$$\int_{-1}^1 e^x\,dx = F(1) - F(-1) = e - \frac{1}{e}.$$

■

এবার তুমি নিজে কয়েকটা অংক চেষ্টা করো।

Exercise 2: নীচের প্রতি ক্ষেত্রে $f(x)$-এর গ্রাফের নীচের যে অংশটা $x = a$ থেকে $x = b$ পর্যন্ত বিস্তৃত, তার area বার করো।

1. $f(x) = e^{2x},\ a = 0$ আর $b = 2$
2. $f(x) = 2 + \cos x,\ a = 0$ আর $b = 2$
3. $f(x) = x^3,\ a = 0$ আর $b = 1$
4. $f(x) = \sec^2 x,\ a = 0$ আর $b = \frac{\pi}{4}$.

■

আমাদের পরিচিত shape-গুলোর বেলাতে এই কায়দাটা লাগালে আমাদের ছোটোবেলায় শেখা ফর্মুলাগুলোই ফিরে পাবে। দেখা যাক।

Example 5: ধরো একটা rectangle আছে Fig 6-এর মত। এটাকে আমরা একটা গ্রাফের নীচের area বলে ভাবতে

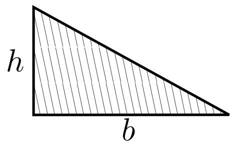


Fig 8

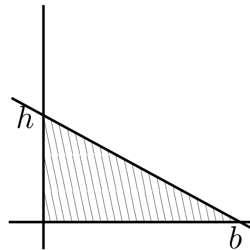


Fig 9

পারি Fig 7-র মত করে। এখানে $f(x)$ হল একটা constant function. এর উপরে antiderivative-এর কায়দাটা লাগিয়ে দ্যাখো, কী আসে।

SOLUTION: এখানে $f(x) \equiv h$-এর একটা antiderivative হল $F(x) = hx$. আমাদের অঞ্চলটা $x = 0$ থেকে $x = w$ অব্দি বিস্তৃত। তাই উত্তর হবে $F(w) - F(0) = hw - h \times 0 = hw$. ঠিক এই জিনিসটাই আমরা ছোটোবেলায় শেখা ফর্মুলা থেকেও পাই। ■

একই কায়দা ত্রিভুজের উপর খাটানো যাক। আমরা এখানে একটা right-angled triangle (সমকোণী ত্রিভুজ) নিয়ে কাজ করব।

Exercise 3: Fig 8-এর ত্রিভুজটাকে আমরা Fig 9-এর মত করে একটা গ্রাফের নীচের অঞ্চল বলে ভাবতে পারি। গ্রাফটা একটা সরলরেখা। এটা $(b, 0)$ এবং $(0, h)$ বিন্দু দুটো দিয়ে যায়। অতএব এর equation-টা বার করতে পারবে। এবার antiderivative-এর কায়দাটা লাগিয়ে দ্যাখো পরিচিত ফর্মুলাটাই পাও কিনা। ■

Example 6: Fig 10-এ $x^2 = 4y$-এর গ্রাফ দেখিয়েছি। তোমাকে বার করতে হবে $x = -1$ থেকে $x = 2$ পর্যন্ত x-axis আর এই গ্রাফটার মধ্যবর্তী অঞ্চলের area কত।

SOLUTION: উত্তর হল

$$\int_{-1}^{2} \frac{x^2}{4}\, dx = \frac{1}{12}x^3\Big|_{-1}^{2} = \frac{3}{4}.$$

■

এর পরের অংকটা এরই উপরে সামান্য কারিকুরি।

Example 7: The area (in sq. units) of the region bounded by the curve $x^2 = 4y$ and the straight line $x = 4y - 2$ is

Fig 10

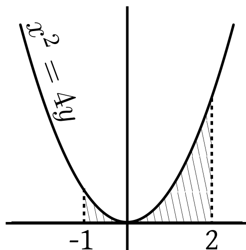


Fig 11

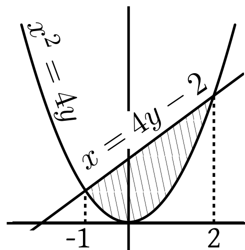
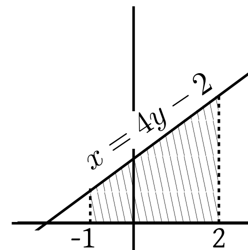


Fig 12



(A) $\frac{5}{4}$

(B) $\frac{9}{8}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) $\frac{7}{8}$

(JEE(main)2019)
SOLUTION:
Fig 11 দেখে নাও। এটা অনেকটা আগের অংকটারই মত, খালি এখানে মেঝেটা মোটেই x-axis নয়। এখানে আমরা শেড করা অঞ্চলটাকে Fig 12-এর থেকে Fig 10-কে বাদ দেওয়া বলে বলে ভাবতে পারি। এর মধ্যে Fig 12-র area-টা হল $\int_{-1}^{2} \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\, dx$. এখানে আমরা $x = 4y - 2$-কে সাজিয়ে $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$ করে নিয়েছি। এবার এ থেকে বাদ দিতে হবে Fig 10-এর area-টা, মানে $\int_{-1}^{2} \frac{x^2}{4}\, dx$. সুতরাং সব মিলিয়ে একটা integral হিসেবে লিখতে পারি--

$$\int_{-1}^{2} \frac{x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\, dx = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 \Big|_{-1}^{2} = \frac{3}{8} + \frac{3}{2} - \frac{9}{12} = \frac{9}{8}.$$

তাহলে উত্তর হল (B). ■

এই অংকটার কায়দায় তুমি Fig 13-এর মত যেকোনো অঞ্চলের area প্রকাশ করে ফেলতে পারবে $\int_a^b f(x) - g(x)\, dx$ আকারে। নীচের অংকটাও এই একই ধারণার উপর দাঁড়িয়ে আছে, একটা area থেকে আরেকটা area বাদ দেওয়া।

Exercise 4: The area (in sq. units) in the first quadrant bounded by the parabola $y = x^2 + 1$, the tangent to it at the point $(2, 5)$ and the coordinate axes is

(A) $\frac{14}{3}$

(B) $\frac{187}{24}$

(C) $\frac{37}{24}$

(D) $\frac{8}{3}$

(JEE(main)2019)
HINT:
যে area-টা বার করতে বলেছে তার ছবি দেখিয়েছি Fig 14-এ। এখানে tangent-এর equation-টা কী করে বার করতে হয়, সেটা আমরা আমাদের বাংলায়-বোঝানো-ইংরাজি-বই সিরিজের Differential Calculus বইতে আলোচনা করেছিলাম। এখানে চট্ করে মনে করিয়ে দিই। Tangent-টা বলাই আছে যে $(2, 5)$ বিন্দু দিয়ে যাবে। ওর slope হবে ওই বিন্দুতে

Fig 13

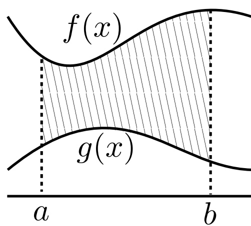


Fig 14

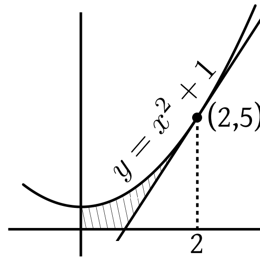
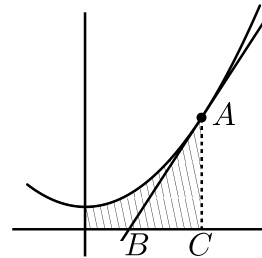


Fig 15



$y = x^2 + 1$-এর slope-এর সমান, মানে $\frac{dy}{dx}$-এর সমান। এখন $\frac{dy}{dx} = 2x$, যেটা $(2,5)$ বিন্দুতে $2 \times 2 = 4$. অতএব tangent-টার equation হবে $y = 4x + c$ জাতীয়। যেহেতু এটা $(2,5)$ দিয়ে যায়, তাই $5 = 4 \times 2 + c$ হবে, মানে $c = -3$. সুতরাং equation-টা হচ্ছে $y = 4x - 3$.
এবার Fig 15 দ্যাখো। নিশ্চয়ই বুঝতে পারছ যে, এই area-টার থেকে ABC ত্রিভুজের area-টা বাদ দিলেই প্রয়োজনীয় area-টা পাওয়া যাবে। তা হলে ধাপগুলো বুঝে গেলে? এবার করতে থাকো--

- প্রথম ধাপে Fig 15-এর area-টাকে একটা definite integral-এর আকারে প্রকাশ করো।
- তারপর definite integral-টাকে কষে ফেলো।
- এবার ABC ত্রিভুজের area বার করতে হবে। তার জন্য AC আর BC-র দৈর্ঘ্য লাগবে। এর মধ্যে $AC = 5$.
- এবার tangent-এর equation-টা ব্যবহার করে C বিন্দুর অবস্থান বার করে ফেলো। তা থেকে BC-র দৈর্ঘ্য বার করো।
- অবশেষে সব কিছু মিলিয়ে উত্তরটা বার করো।

■

একই রকম একগুচ্ছ অংক রয়েছে নীচে। চট্‌পট্‌ করে ফেলো। আত্মবিশ্বাস বেড়ে যাবে। প্রত্যেকটার ক্ষেত্রেই কিন্তু ছবি এঁকে নিতে ভুলো না। ছবি দেখেই বুঝতে পারবে কী করে area-টাকে সহজতর area-এ ভেঙে নেওয়া যায়। এই অংকগুলো আসলে গ্রাফ আঁকারই অংক, integration-গুলো সহজই।

Exercise 5: The area (in sq. units) of the region bounded by the parabola $y = x^2 + 2$ and the lines $y = x + 1$, $x = 0$ and $x = 3$ is

(A) $\frac{15}{4}$

(B) $\frac{15}{2}$

(C) $\frac{21}{2}$

(D) $\frac{17}{4}$

(JEE(main)2019)
HINT: ছবি আঁকার জন্য $y = x^2$-এর গ্রাফ নিয়ে শুরু করো। সেটাকে 2 ঘর উপরে তুলে দিলেই পেয়ে যাবে $y = x^2 + 2$-এর গ্রাফ। একইভাবে $y = x$-এর গ্রাফকে 1 ঘর উঠিয়ে $y = x + 1$-এর গ্রাফ পাবে। ■

Exercise 6: The area (in sq. units) of the region

$$\{(x, y) \ : \ x \geq 0, \quad x + y \leq 3, \quad x^2 \leq 4y \text{ and } y \leq 1 + \sqrt{x}\}$$

is

(A) $\frac{5}{2}$

(B) $\frac{59}{12}$

(C) $\frac{3}{2}$

(D) $\frac{7}{3}$

(JEE(main)2017) এখানে তোমাকে আঁকতে হবে এই গ্রাফগুলো--

- $x + y = 3$ বা $y = -x + 3$. এর জন্য $y = -x$-এর লাইনটাকে 3 ঘর তুলে দিলেই হবে।
- $x^2 = 4y$, বা $y = \frac{x^2}{4}$. এটার জন্য $y = x^2$ নিয়ে শুরু করো, তারপর vertical দিকে সবকিছু $\frac{1}{4}$ পরিমাণ চ্যাপ্টা করে দাও।
- $y = 1 + \sqrt{x}$. শুরু করো $y = x^2$ নিয়ে, সেটাকে $y = x$ লাইন বরাবর প্রতিফলিত করলেই পাবে $y = \sqrt{x}$-এর গ্রাফ। এখানে অবশ্যই $x \geq 0$ নিয়ে কাজ করতে হবে। তারপর 1 ঘর তুলে দাও, ব্যস, $y = 1 + \sqrt{x}$-এর গ্রাফ পেয়ে যাবে।

■

Exercise 7: The area (in sq units) of the region

$$\{(x, y) \ : \ y^2 \geq 2x \text{ and } x^2 + y^2 \leq 4x, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$$

is

(A) $\pi - \frac{4}{3}$

(B) $\pi - \frac{8}{3}$

(C) $\pi - \frac{4\sqrt{2}}{3}$

(D) $\frac{\pi}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3}$

(JEE(main)2016)

HINT:

এখানে $x^2 + y^2 \leq 4x$-এর ছবি আঁকা নিয়ে ভয় লাগতে পারে। খুব একটা ভয়ের কারণ নেই। ওকে এইভাবে লিখে নাও--

$$x^2 - 4x + y^2 \leq 0,$$

বা

$$(x - 2)^2 + y^2 \leq 2^2.$$

এটা হল $(2, 0)$-তে centre আর 2 radius-ওয়ালা circle (ভিতরটা সুদ্ধ)।

■

Exercise 8: The area (in sq units) of the region described by

$$\{(x, y) \ : \ y^2 \leq 2x \text{ and } y \geq 4x - 1\}$$

is

(A) $\frac{7}{32}$

(B) $\frac{5}{64}$

(C) $\frac{15}{64}$

(D) $\frac{9}{32}$

(JEE(main)2015)
HINT: ছবিটা এঁকে নিলেই বুঝবে যে, y-এর সাপেক্ষে integrate করলে সুবিধা হবে। ■

Exercise 9: The area of the region

$$\{(x,y) \ : \ xy \leq 8, \quad 1 \leq y \leq x^2\}$$

is

(A) $16\log_e 2 - \frac{14}{3}$

(B) $8\log_e 2 - \frac{14}{3}$

(C) $16\log_e 2 - 6$

(D) $8\log_e 2 - \frac{7}{3}$

(JEE(adv)2019.I4)
HINT: ছবি আঁকার জন্য খালি মনে রেখো যে $xy = 8$ হল একটা rectangular hyperbola, যার গ্রাফটা দেখিয়েছি Fig 16-এ। ■

এবার একটা বোকা-বোকা জিনিস করি।

Example 8: ধরো একটা function দিলাম, $f(x) = 2x$. তুমি জানো কী করে কোনো $a \neq b$ দেওয়া থাকলে এর গ্রাফের নীচের $x = a$ থেকে $x = b$ পর্যন্ত area-টা বার করে (Fig 17)। যদি $a = b$ হয়ে যায়, তবে area-টা কী হবে? প্রথমে ছবি দিয়ে ভেবে আন্দাজ করো, তারপর integrate করে মিলিয়ে দ্যাখো।
SOLUTION: ছবিটা হবে Fig 18-এর মত। শেড করা অঞ্চলটা এখানে একটা vertical লাইনে পরিণত হয়েছে। যার area হল 0. এবার integration-এর কায়দা করে দেখি। $f(x) = 2x$-এর একটা antiderivative হল $F(x) = x^2$. যদি $x = a$ থেকে $x = b$ অব্‌ধি যেতাম, তবে $F(b) - F(a)$ বার করতে হত। এখানে $b = a$. তাই এখানে area-টা হবে $F(a) - F(a) = 0$, ঠিক যেটা আমরা ছবি থেকেই বুঝেছিলাম। ■

এই কারণে আমরা $\int_a^b f(x)\,dx$ বার করার সময়ে $[a,b]$-র উপরে কাজ করছি নাকি $(a,b]$-এর উপরে কাজ করছি (বা $[a,b)$ কিংবা (a,b)-এর উপরে) তা নিয়ে মাথা ঘামাই না। যদি $[a,b]$-র বদলে (a,b) নিয়েও কাজ কর, তবে area-টা থেকে প্রান্তের দুটো লাইন খালি বাদ যাবে, যাদের area এমনিতেই শূন্য।

Fig 16

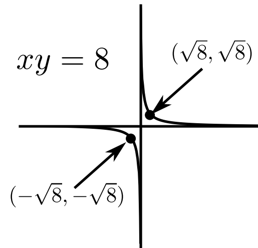


Fig 17

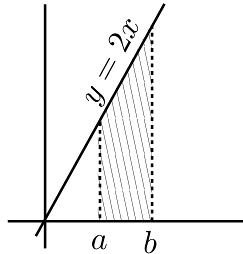
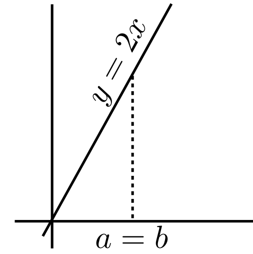
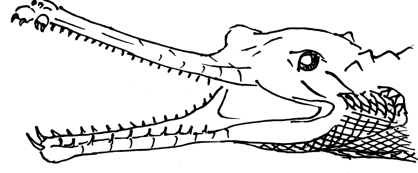


Fig 18





মনে করো তুমি কোথাও সাঁতার কাটতে নেমেছ, আর হঠাৎ দেখলে পাশের ছবির ওই প্রাণীটা তোমার দিকে প্যাট্ প্যাট্ করে চেয়ে আছে। তোমার তো দেখেই আত্মারাম খাঁচাছাড়া হবার জোগাড় হবে। কিন্তু কুমীরজাতীয় জীব হলেও ওই সরুমুখওয়ালা প্রাণীটা আসলে কুমীর নয় মোটেই! ওর নাম হল ঘড়িয়াল, ওরা অতিশয় নিরীহ প্রাণী, খালি মাছ খায়, মানুষ বা কোনো বড় জন্তুকে ভুলেও আক্রমণ করে না। সুতরাং ওকে ভয় পাওয়া বোকামি। তা, অংকের জগতেও এরকম অনেক ঘড়িয়াল আছে, অতি নিরীহ অংক অথচ দেখলেই বুকের রক্ত হিম হয়ে যায়। এরকম দুটো অংক দিই এবার।

Exercise 10: Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function defined by $f(x) = \begin{cases} [x] & \text{if } x \leq 2 \\ 0 & \text{if } x > 2 \end{cases}$, where $[x]$ is the greatest integer less than or equal to x. If

$$I = \int_{-1}^{3} \frac{x\, f(x^2)}{2 + f(x+1)}\, dx,$$

then the value of $4I - 1$ is... **(JEE(adv)2015.I46)**

HINT:

> Here $f(x) = 0$ if $x > 2$.
> Hence $f(x^2) = 0$ if $x^2 > 2$.

সুতরাং $x^2 > 2$ হলে integrand-টা শূন্য হয়ে যাচ্ছে, অতএব আমাদের খালি $x^2 \leq 2$ নিয়ে মাথা ঘামালেই হবে।

> So, for $x \in (-1, 3]$
> $$f(x^2) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [1, \sqrt{2}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

মনে রেখো যে $\sqrt{2} \approx 1.414$. গোড়ায় integral-টা ছিল -1 থেকে 3 পর্যন্ত, অতএব এখন খালি -1 থেকে $\sqrt{2}$ অব্ধি পড়ে রইল। এর মধ্যেও দ্যাখো যখন $x \in (-1, 1)$, তখন $x^2 \in [0, 1)$, তাই $[x^2] = 0$. অতএব integral-টার নিরীহ রূপ এখন অনেকটাই প্রকট--

> Thus,
> $$I = \int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{x}{2 + f(x+1)}\, dx.$$

এখনও অবশ্য নীচের তলার ওই $f(x+1)$-টা একটু একটু ভয় দেখাতে চেষ্টা করছে। কিন্তু লক্ষ করো--

> Now, for $x \in [1, \sqrt{2})$, we have $f(x+1) = 2$.

সুতরাং এবার আর integral-টার নখদন্ত কিছুই রইল না--

> Hence
> $$I = \frac{1}{4} \int_{1}^{\sqrt{2}} x\, dx.$$

এবার আর ঘড়িয়ালটাকে শায়েস্তা করতে কতক্ষণ? ■

আরেকটা ঘড়িয়াল দেখাই এবার।

Exercise 11: Let $g(x) = \cos x^2$, $f(x) = \sqrt{x}$, and α, β $(\alpha < \beta)$ be the roots of the quadratic equation $18x^2 - 9\pi x + \pi^2 = 0$. Then the area (in sq. units) bounded by the curve $y = (g \circ f)(x)$ and the lines $x = \alpha$, $x = \beta$ and $y = 0$ is

(A) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$

(B) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)$

(C) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

(D) $\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$

(JEE(main)2018)

HINT:
এখানে বার করতে হবে $\int_\alpha^\beta (g \circ f)(x)\,dx$. ভালো করে বুঝে নাও integrand-টা কী। ওটা হল $\cos(\sqrt{x})^2$, অর্থাৎ কিনা স্রেফ $\cos x$. বাপ্ রে, কি সব composition-টম্পোজিশন লিখে ভয় খাইয়ে দিয়েছিল! আর ওই quadratic-টার root বার করার ফর্মুলা তো জানিই--

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

এখানে $a = 18, \quad b = -9\pi$ আর $c = \pi^2$. সুতরাং পেয়ে যাচ্ছি $\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ আর $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$.
সব মিলিয়ে অংকটা আসলে দাঁড়াল

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx.$$

বাকিটা নিশ্চয়ই আর করে দিতে হবে না?
■

DAY 4
জিনিসটা কী? (part 2)

4.1 দ্বিতীয় ধাপ: signed area

এতক্ষণ আমরা যে সব $\int_a^b f(x)\,dx$ বার করছিলাম, সেখানে $f(x) \geq 0$ আর $a \leq b$ হচ্ছিল। এবার দেখব এ দুটো শর্ত পালিত না হলে কী হয়।

Example 9: ধরো $f(x) = -x^2$ দিলাম, এবং $x = 1$ থেকে $x = 2$ পর্যন্ত এর গ্রাফের নীচের area বার করতে বললাম। কী করবে?

SOLUTION: আমাদের কায়দাটা লাগালে এবার একটু সমস্যা হবে। এখানে $f(x)$-এর একটা antiderivative হল $F(x) = -\frac{1}{3}x^3$. সুতরাং আমাদের কায়দাটা অন্ধের মত লাগিয়ে দিলে উত্তর পাবে

$$F(2) - F(1) = \cdots = -\frac{7}{3}.$$

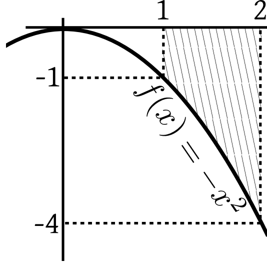


Fig 19

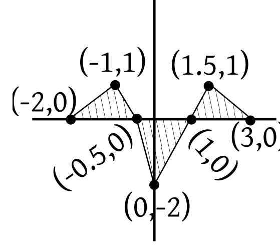


Fig 20

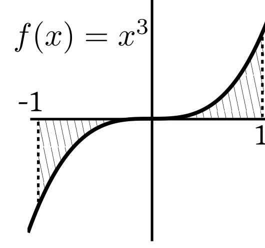


Fig 21

কিন্তু area আবার < 0 হয় কী করে? আসলে সমস্যাটা কী হচ্ছে, সেটা বোঝা যাবে গ্রাফটা আঁকলে (Fig 19)। এখানে শেড করা অংশটা রয়েছে x-axis-এর নীচে। সেই কারণেই ওই মাইনাস চিহ্নটা এসেছে। অংকের জগতে একে বলে **signed area**. যদি শেড করা অঞ্চলটা x-axis-এর উপরে হয়, তবে আমরা জ্যামিতিতে যে area বুঝি সেটাই signed area হয়। কিন্তু যদি অঞ্চলটা x-axis-এর নীচে হয়, তবে signed area-টা হবে জ্যামিতিক area-র negative. যদি শেড করা অঞ্চলটা খানিকটা x-axis-এর উপরে আর খানিকটা নীচে হয়, তবে signed area হবে x-axis-এর পরের অংশের জ্যামিতিক area বিয়োগ নীচের অংশের জ্যামিতিক area. ■

নীচের অংকটা করে signed area-র ধারণাটার সঙ্গে বন্ধুত্ব করে নাও।

Exercise 12: Fig 20-এ একটা শেড করা অঞ্চল রয়েছে। গ্রাফ কাগজের উপর আঁকা। এর signed area এবং জ্যামিতিক area বার করো।
HINT: তোমাকে খালি খেয়াল রাখতে হবে কোন্ কোন্ অংশ x-axis-এর উপরে আর নীচে আছে। এখানে y-axis-টা নিয়ে মাথা ঘামানোর কিছু নেই।
■

Exercise 13: x^3-এর গ্রাফ, x-axis, $x = 0$ আর $x = -1$ দিয়ে ঘেরা জায়গাটার area বার করো (signed area নয়)।
HINT: প্রথমে ছবিটা এঁকে নাও, তবে বুঝবে এখানে signed area-র সঙ্গে (জ্যামিতিক) area-র সম্পর্কটা কী)। তারপর integration-এর কায়দাটা লাগিয়ে signed area বার করে, সেখান থেকে জ্যামিতিক area বার করো।
■

এবার আরেকটু জটিল একটা উদাহরণ দেখি, যেখানে শেড করা অঞ্চলটা খানিকটা x-axis-এর উপরে আর খানিকটা নীচে।

Example 10: Fig 21-এর শেড করা অঞ্চলের area বার করো।

SOLUTION:এখানে $f(x) = x^3$-এর একটা antiderivative হল $F(x) = \frac{1}{4}x^4$. সুতরাং আমাদের কায়দায় উত্তর আসা উচিত

$$F(1) - F(-1) = \cdots = 0.$$

কিন্তু area-টা শূন্য হয় কী করে? দিব্যি দেখতে পাচ্ছি খানিকটা জায়গা জুড়ে শেড করা রয়েছে! আসলে এটা হল signed area-টা। একবার Fig 21-র দিকে তাকালেই বুঝবে যে শেড করা জায়গাটার দুটো সমান অংশ, একটা x-axis-এর উপরে, আর অন্যটা নীচে। তাই দুটোর signed area পরস্পর কাটাকাটি হয়ে উত্তর হয়েছে শূন্য! আমাদের অবশ্য signed area বার করতে বলে নি, খালি area বার করতে বলেছে। এরকম ক্ষেত্রে (জ্যামিতিক) area বার করার কায়দা হল দুটো অংশকে আলাদা করে দেখা। যে অংশটা x-axis-এর উপরে, তার বেলায় signed area বার করলেই হবে--

$$F(1) - F(0) = \cdots = \frac{1}{4}.$$

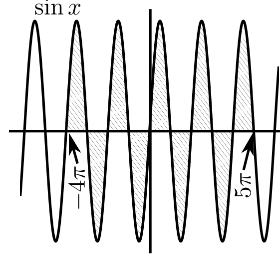


Fig 22

অন্য অংশটার বেলায় signed area-র negative নিতে হবে। এখানে অবশ্য কষ্ট করে signed area-টা বার করতেও হবে না। দেখাই যাচ্ছে যে দুটো অংশের জ্যামিতিক area-ই সমান। একটা অংশের জ্যামিতিক area যে $\frac{1}{4}$ বার করেছি, সেটাই যথেষ্ট। মোট area তাহলে দাঁড়াচ্ছে $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$. ■

Example 11: Fig 22-এ $\sin x$-এর গ্রাফ দেখিয়েছি। ধরো তোমাকে বার করতে বললাম -4π থেকে 5π পর্যন্ত শেড করা অঞ্চলটার signed area. যদিও এখানে অনেকগুলো ঢেউ আছে, কিন্তু আসলে ঢেউয়ের উপরের অংশ আর নীচের অংশের signed area-গুলো কাটাকাটি হয়ে খালি শেষের ঢেউয়ের টুকরো অংশটাই টিঁকে থাকবে। Integrate করেই দ্যাখো।

SOLUTION:এখানে $\sin x$-এর একটা antiderivative হল $-\cos x$. আমরা কাজ করছি $x=-4\pi$ থেকে $x=5\pi$ অব্ধি, তাই মোট signed area হবে

$$\begin{aligned} & -\cos(5\pi)-(-\cos(-4\pi)) \\ = & \cdots = 1+1=2. \end{aligned}$$

■

বুড়ো বলল--আমার বয়েস তো কত উঠল, নামল, আবার উঠল, এখন আমার বয়েস হয়েছে তেরো।
শুনে আমার ভয়ানক হাসি পেয়ে গেল।
--হ য ব র ল (সুকুমার রায়)

আমরা আগে দেখেছিলাম Fig 23-এর শেড করা area-টা হয় $\int_a^b f(x)-g(x)\,dx$. যদি ছাদের $f(x)$-টা কোনো জায়গায় মেঝের $g(x)$-এর নীচে নেমে আসে (Fig 24-এর মত), তবে কিন্তু $\int_a^b f(x)-g(x)\,dx$ খালি signed area-ই দেবে, যেটা মোটেই area-এর সমান নয়। এ ক্ষেত্রে area বার করার জন্য তিনভাগে ভেঙে এগোতে হবে--

$$\int_a^{c_1} f(x)-g(x)\,dx+\int_{c_1}^{c_2} g(x)-f(x)\,dx+\int_{c_1}^{b} f(x)-g(x)\,dx.$$

Fig 23

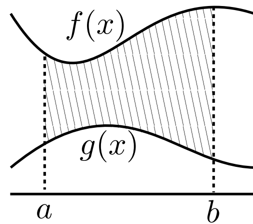
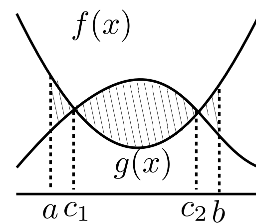


Fig 24



এবার দেখি $\int_a^b f(x)\,dx$ বার করার সময়ে $a > b$ হয়ে গেলে কী হয়।

Example 12: $\int_2^1 e^x\,dx = ?$

SOLUTION: এখানেও আমাদের সূত্র লাগিয়ে দিলে পাব

$$\int_2^1 e^x\,dx = e - e^2.$$

যদিও $e^x > 0$, তাও কিন্তু উত্তরটা < 0 হল, কারণ এখানে integral-এর নীচের প্রান্তের সংখ্যাটা (মানে 2) হল উপরের প্রান্তের সংখ্যাটার (মানে 1-এর) চেয়ে বড়। ■

আমাদের আলোচনা থেকেই বুঝতে পারছ যে--

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Exercise 14: এই সূত্রে $a = b$ বসিয়ে দ্যাখো তো কোনো পরিচিত সূত্র পাও কিনা। ■

নীচের অংকটা একটা JEE-এর প্রশ্নের আদলে তৈরী, মূল প্রশ্নটায় একটা সামান্য ভাষার গোলমাল ছিল, সেটা ঠিক করে এটা বানিয়েছি।

Example 13: Let $I = \int_a^b (x^4 - 2x^2)\,dx$ for $a \leq b$. If I is minimum, then the ordered pair (a, b) is:

(A) $(-\sqrt{2}, 0)$

(B) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

(C) $(0, \sqrt{2})$

(D) $(\sqrt{2}, 2)$

SOLUTION: প্রথমে বোঝা যাক, অংকটা কী বলছে। এখানে I হল একটা definite integral যেটা a থেকে b পর্যন্ত। বুঝতেই পারছ a, b বদলালে I-ও বদলাবে। প্রশ্ন হল a, b ঠিক কীভাবে নিলে I-টা সবচেয়ে ছোটো হবে। এখানে **ordered pair** বলে একটা কথা ব্যবহার করা হয়েছে। এর মধ্যে pair মানে তো জানোই, এক জোড়া। আর ordered মানে সেই জোড়ার মধ্যে কে আগে কে পরে সেটা গুরুত্বপূর্ণ। যেমন $(2, 3)$ আর $(3, 2)$-কে ordered pair হিসেবে ভাবলে আলাদা (যদিও unordered pair হিসেবে ভাবলে ওরা একই। তাই যদি বলি ordered pair হিসেবে $(a, b) = (1, 2)$ তবে বুঝতে হবে $a = 1$ আর $b = 2$. সুতরাং আমাদের চারটে option আসলে হল

(A) $a = -\sqrt{2}, \quad b = 0$

(B) $a = -\sqrt{2}, \quad b = \sqrt{2}$

(C) $a = 0, \quad b = \sqrt{2}$

(D) $a = \sqrt{2}, \quad b = 2.$

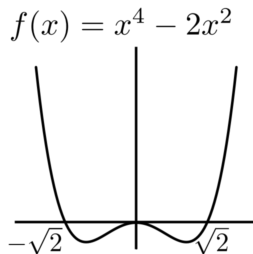


Fig 25

এবার integrand-টার দিকে চোখ ফেরানো যাক। যদি সেটা সর্বদাই ≥ 0 হত, তবে $a \leq b$ হওয়ায় integral-টাও ≥ 0 হত। অতএব minimum হত 0, এবং তার জন্য $a = b$ নিলেই হত। কিন্তু আমাদের integrand-টা হল $x^4 - 2x^2$, যেটা < 0-ও হতে পারে। সুতরাং ওই অংশগুলোতে signed area হবে < 0, তাই integral-টাকে আরো কমানো যাবে। দেখা যাক integrand-টা কোথায় কোথায় < 0 হচ্ছে। $x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$-এর মধ্যে x^2-টা তো আর < 0 হতে পারে না। তাই integrand-টা < 0 হবে একমাত্র তখনই যখন $x^2 - 2 < 0$ হবে, মানে $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ হবে। সুতরাং যদি এই অংশটার উপরে integrate করি, তবেই signed area-টা সবচেয়ে কম হবে। তাই উত্তর হবে $a = -\sqrt{2}$ আর $b = \sqrt{2}$. আমাদের integrand-টার গ্রাফ এঁকে দেখিয়েছি Fig 25-এ। যদিও এই গ্রাফটা আঁকতে পারা এই অংকের জন্য দরকারী নয়, তাও দিলাম, কারণ বেশ সুন্দর দেখতে, তাই না? ■

আগের অংকটা বানিয়েছিলাম যেই অংকের আদলে, সেই মূল অংকটা হল এইটা--

Example 14: Let $I = \int_a^b (x^4 - 2x^2)\, dx$. If I is minimum, then the ordered pair (a, b) is:

(A) $(-\sqrt{2}, 0)$

(B) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

(C) $(0, \sqrt{2})$

(D) $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

(JEE(main)2019)

SOLUTION: এখানে ভাষাটা গোলমেলে। আসলে জানতে চায়, কোন্‌টার ক্ষেত্রে I-টা এই option-গুলোর মধ্যে সবচেয়ে ছোটো হবে।

> The integrand is negative when $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. So the integral is negative for (B). In all other cases, the integral is positive. Hence the correct option is (B).

তবে যদি $a = 100$ আর $b = 2$ নাও তবে integral-টা আরো ছোটো হবে। সুতরাং (B)-এর জন্যই integral-টা minimum হচ্ছে না, সেখানেই প্রশ্নটার গলদ। ■

Example 15: Let f be a differentiable function from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ such that $|f(x) - f(y)| \leq 2|x - y|^{\frac{3}{2}}$ for all $x, y \in \mathbb{R}$. If $f(0) = 1$, then $\int_0^1 f^2(x)\, dx$ is equal to

(A) 0

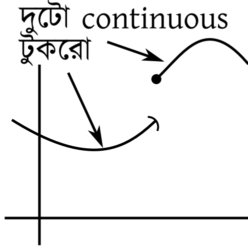


Fig 26

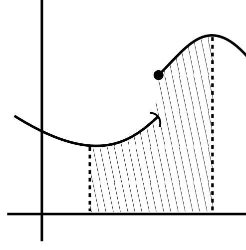


Fig 27

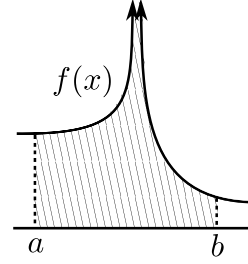


Fig 28

(B) $\frac{1}{2}$

(C) 2

(D) 1

(JEE(main)2019)

SOLUTION: অংকটা দেখে প্রথমে ভয় লাগতে পারে। তবে যেহেতু এটা MCQ, তাই একটা ফাঁকি দেবার সুযোগ রয়েছে। লক্ষ করো option-গুলোর মধ্যে কোথাও f নেই। তার মানে এরকম যাই f নাও না কেন, একই উত্তর আসতে বাধ্য। অতএব যদি এরকম একটা f-এর উদাহরণ পাওয়া যায়, তবে সেটা বসিয়ে যা পাবে, সেটাই হবে উত্তর[1]। তা, এরকম একটা f তো চোখে দেখেই বলা যায়, $f(x) \equiv 1$. এটা বসালেই উত্তর চলে আসছে 1. তার মানে উত্তর হবে (D).

এবার বলি ফাঁকি না দিয়ে অংকটা কীভাবে করা যায়। আমাদের বলেছে $|f(x)-f(y)| \leq 2|x-y|^{\frac{3}{2}}$. এর মধ্যে $f(x)-f(y)$ আর $x-y$ দেখেই তোমার মনে পড়া উচিত $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$-এর কথা, যেটা derivative-এর সংজ্ঞায় লাগে। শর্তটাকে একটু সাজিয়ে নিলেই পাবে--

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq 2\sqrt{|x-y|}.$$

এবার x-কে স্থির রেখে যদি $y \to x$ নাও, তবে বাঁদিকটা যাচ্ছে $|f'(x)|$-এ আর ডানদিক যাচ্ছে 0-তে, অতএব পাবে $|f'(x)| = 0$. এটা সব $x \in \mathbb{R}$-এর জন্যই হবে, তাই f একটা constant function হতে বাধ্য। বলে দিয়েছে $f(0) = 1$, অতএব $f(x) \equiv 1$ হবেই। অর্থাৎ আমাদের ফাঁকিবাজির কায়দার উদাহরণটাই আসলে একমাত্র এরকম f. সুতরাং (D)-টাই উত্তর। ■

4.2 তৃতীয় ধাপ: continuous টুকরো জুড়ে তৈরী

অনেক function আছে, তারা continuous নয়, কিন্তু কয়েকটা continuous টুকরো জুড়ে তৈরী। একটা উদাহরণ দেখিয়েছি Fig 26-এ। এরকম function-এর গ্রাফ দিয়ে ঘেরা অঞ্চলের signed area বার করা শিখব এবার (Fig 27)। যেহেতু গ্রাফটা "একটানা" নয়, তাই "ঘেরা" শব্দটা হয়তো বলা ঠিক হল না। বলা উচিত সেই সব বিন্দুর set, যারা x-axis এবং এবং গ্রাফটার মধ্যবর্তী অঞ্চলে আছে । কোনো কোনো function আছে, যারা discontinuity-র সুযোগে একেবারে ∞ বা $-\infty$-র দিকে ছুট্ লাগায়। একটা উদাহরণ দেখিয়েছি Fig 28-এ। এরকম ক্ষেত্রে শেড করা অঞ্চলটা একেবারে ∞ বা $-\infty$ অব্ধি বিস্তৃত। সেরকম কেস আমাদের সিলেবাসের বাইরে, তাই আমরাও আলোচনা থেকে বাদ রাখব। যারা পরে আরো অংক নিয়ে পড়াশোনা করবে, তারা শিখবে সেই সব ক্ষেত্রে কী করতে হয়।

এখানেও আমরা সেই একই চিহ্ন বজায় রাখব--

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

এখানেও আগের মত a, b যেকোনো দুটো সংখ্যা হতে পারে, এবং $f(x)$-ও < 0, > 0 বা $= 0$ সব রকম value নিতে পারে। বাড়তি স্বাধীনতা হল এই যে, $f(x)$-টা continuous না হলেও চলবে, খালি যেন finite-সংখ্যক continuous টুকরো জুড়ে তৈরী হয়, আর ∞ বা $-\infty$-র দিকে ছুটতে না শুরু করে।

[1]যদি None of the above জাতীয় option থাকত, তবে এই ফাঁকিটা চলত না।

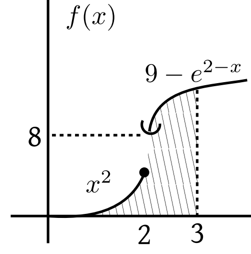


Fig 29

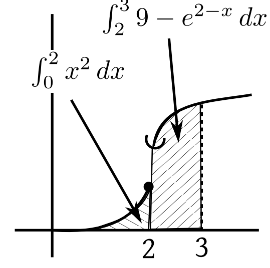


Fig 30

একটা উদাহরণ দেখা যাক।

Example 16: Fig 29-এর শেড করা area-টা বার করো। এখানে

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{if } x\in[0,2] \\ 9-e^{2-x} & \text{if } x\in(2,\infty) \end{cases}$$

SOLUTION: এখানে 2-তে একটা discontinuity আছে, যার জন্য $f(x)$-এর গ্রাফটা দুটো continuous টুকরোতে ভেঙে গেছে। ফলে শেড করা জায়গাটাও দুটো টুকরো হয়ে গেছে। প্রতিটা টুকরোর area প্রথম ধাপের কায়দায় বার করা যাবে (Fig 30)। তারপর যোগ করে দিলেই হল, মানে

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^2 x^2\,dx+\int_2^3 9-e^{2-x}\,dx=\cdots=\frac{8}{3}+9+1-e^{-1}=\frac{38}{3}-e^{-1}.$$

সাবধান, এখানে কিন্তু টুকরোতে না ভেঙে সরাসরি প্রথম ধাপের কায়দাটা লাগানো যাবে না। কারণ $f(x)$-এর কোনো antiderivative-ই নেই, কারণ কোনো function-এর derivative-এর গ্রাফে এরকম কোনো ফাঁক থাকতে পারে না, যেমনটা f-এর গ্রাফে রয়েছে। ■

4.3 $\int_a^b f(x)\,dx$ তাহলে কী দাঁড়ালো?

আমাদের বইতে আমরা যখনই $\int_a^b f(x)\,dx$ লিখব, তখনই বুঝবে--

- $a,b\in\mathbb{R}$ হল যেকোনো দুটো সংখ্যা (সাবধান, ∞ বা $-\infty$ কিন্তু মোটেই $\mathbb{R}$-এর সদস্য নয়!)।
- $f(x)$ হল finite-সংখ্যক continuous অংশ জুড়ে তৈরী, এবং কোথাও ∞ বা $-\infty$-র দিকে হাত বাড়ায় না। পোশাকি ভাষায় এরকম function-কে বলে **bounded piecewise continuous function.**

Fig 31

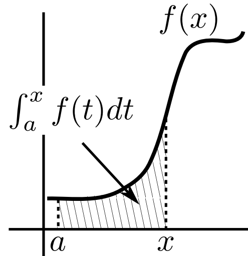


Fig 32

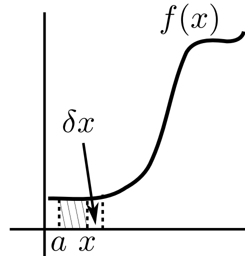
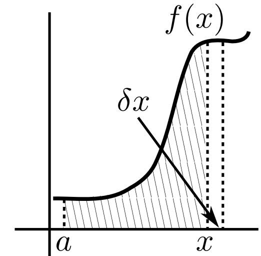


Fig 33



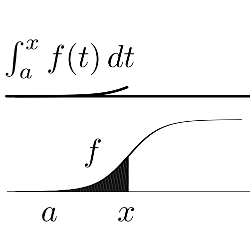


Fig 34

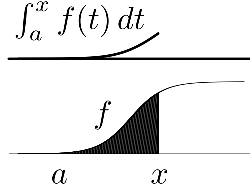


Fig 35

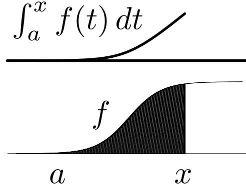


Fig 36

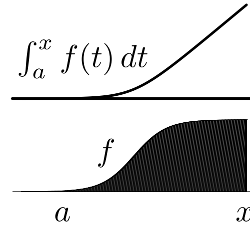


Fig 37

বলে রাখা ভালো যে অংকের দুনিয়ায় $\int_a^b f(x)\,dx$ চিহ্নটা আরো ব্যাপক অর্থে ব্যবহৃত হয়, যদিও সেটা আমাদের সিলেবাসের বাইরে।

DAY 5
Fundamental theorem of calculus (part 1)

এবার আমরা ছবি দিয়ে বোঝার চেষ্টা করব কেন area বার করার জন্য integration-এর কায়দাটা কাজ করে। ধরো একটা function আছে $f(x)$, যার গ্রাফটা Fig 31-এর মত দেখতে। এখানে x-axis-এর উপরে যেকোনো দুটো বিন্দু (ধরো a আর x) দিয়ে দুটো vertical লাইন টানা হয়েছে। তবে এই দুটো লাইনের মধ্যবর্তী signed area-টা হবে $\int_a^x f(t)dt$. আমরা a-কে স্থির রেখে অন্য লাইনটা বাঁদিক ডানদিকে সরাব (মানে x বদলাব)। এর ফলে x-এর function হিসেবে $\int_a^x f(t)dt$-ও বদলাবে। ধরো x-টাকে সামান্য একটু বাড়ালে, তাহলে শেড করার জায়গাটা একটা সরু চিলতি বাড়বে। সুতরাং $\int_a^x f(t)dt$-টা বাড়বে ওই চিলতির signed area যতটা, ততটা। এবার Fig 32 আর Fig 33-এর মধ্যে তুলনা করো। দুইক্ষেত্রেই x একই পরিমাণ বেড়েছে, মানে চিলতি দুটো দুইক্ষেত্রেই সমান চওড়া। কিন্তু $\int_a^x f(t)dt$ কোন ক্ষেত্রে বেশী বাড়বে? অবশ্যই Fig 33-এর ক্ষেত্রে, কারণ চিলতিটা সেখানে বেশী লম্বা। এবার মনে মনে x-কে বাড়াতে থাকো, আর কল্পনা করো যেন অ্যানিমেশনের মত area-টা বেড়ে চলেছে। Fig 34 থেকে Fig 37 পর্যন্ত দেখলে অ্যানিমেশনটার একটা ধারণা পাবে। প্রতিটা ছবিতেই নীচে শেড করা অঞ্চলটা দেখাচ্ছি, আর উপরে দেখাচ্ছি signed area-র গ্রাফটা। যদিও x-টা একই হারে বাড়ছে, signed area-টা কিন্তু একই হারে বাড়ছে না। প্রথমে ধীরে ধীরে বাড়ছিল, তারপর দ্রুতহারে বাড়তে শুরু করেছে। এটা নির্ভর করছে $f(x)$-এর উপর, যেখানে $f(x)$-টা বেশী, সেখানে চিলতিটা বেশী লম্বা, তাই $\int_a^x f(t)dt$-টা সেখানে দ্রুতহারে বাড়ছে, আবার $f(x)$ যেখানে কম, সেখানে $\int_a^x f(t)dt$ বাড়ছে আস্তে আস্তে। যদি কোথাও $f(x) < 0$ হত, সেখানে চিলতিটার signed area হত < 0, তাই সেটা $\int_a^x f(t)dt$-কে কমিয়ে দিত। সুতরাং আন্দাজ করতে পারছ যে, $\int_a^x f(t)dt$-এর বৃদ্ধির হার আসলে $f(x)$-এর সমান, মানে--

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

সবসময়েই কি এরকমটাই হবে? আরেকটা উদাহরণ নিয়ে দেখা যাক।
ধরো এবার $f(x)$-টা নিলাম Fig 38-এর মত--

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } x < 1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

এখানে একটা discontinuity রয়েছে $x = 1$-এ। আগের উদাহরণের অত এখানেও আমরা $\int_a^x f(t)\,dt$ নিয়ে কাজ করব, এবং দেখব x বাড়লে integral-টা কী হারে বাড়ে। আমরা $a = 0$ নেব, মানে বাঁদিকের দেওয়ালটা হবে y-axis-টাই। যতক্ষণ x-টা প্রথম ধাপটাতে রয়েছে, ততক্ষণ signed area-টা আমরা rectangle-এর ফর্মুলা দিয়েই বার করে ফেলতে পারি, $\int_0^x f(t)dt = 2x$. এখানে লক্ষ করো $\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = 2 = f(x)$ হচ্ছে। কিন্তু যেই লাফ মেরে পরের ধাপে যাব

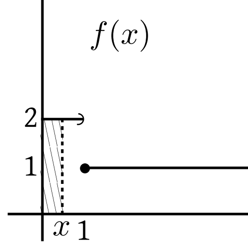


Fig 38

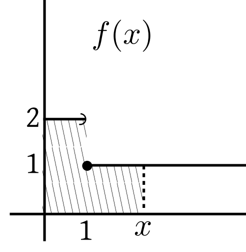


Fig 39

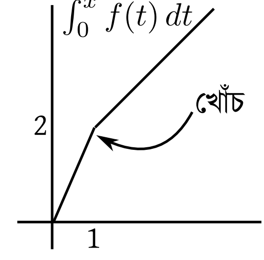


Fig 40

(Fig 39), অমনি rectangle-এর উচ্চতাটা এক লাফে 2 থেকে কমে 1 হয়ে যাবে, তাই তখন শেড করা অঞ্চলটা হবে দুটো rectangle মিলিয়ে তৈরী, প্রথমটার সাইজ 1×2 আর দ্বিতীয়টার $(x-1) \times 1$. তাই তখন $\int_0^x f(t)dt$-টা হবে এইরকম--

$$\int_0^x f(t)dt = 2 + (x-1).$$

সুতরাং সব মিলিয়ে হচ্ছে--

$$\int_0^x f(t)dt = \begin{cases} 2x & \text{if } x < 1 \\ 2 + (x-1) & \text{otherwise} \end{cases}.$$

এই $\int_0^x f(t)dt$-এর গ্রাফটা এঁকেছি Fig 40-এ। লক্ষ করো এখানে $\int_a^x f(t)dt$-টা সর্বত্র differentiable নয়, এক জায়গায় একটা খোঁচ আছে, অর্থাৎ বৃদ্ধির হারটা সেখানে আচমকা বদলে গেছে। এই আচমকা বদলানোর কারণটা হল $x = 1$-এ $f(x)$-এর লাফটা। তাই বলতে পারি যে $f(x)$-টা যেখানে লাফ মারবে, সেখানে $\int_a^x f(t)dt$-টা differentiable নাও হতে পারে। এই ব্যাপারটা এড়াবার জন্য আমরা নীচের theorem-টায় f-কে continuous ধরে নিয়েছি--

First fundamental theorem of calculus

Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Then

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

আমরা এটাকে first fundamental theorem of calculus বলেছি। আন্দাজ করতে পারছ যে, একটা second fundamental theorem of calculus-ও আছে। First fundamental theorem-টার মূল বক্তব্য হল একটা function-কে প্রথমে integrate করে, তারপর differentiate করলে ফের গোড়ার function-টাতেই পৌঁছনো যায়। অবশ্য তার জন্য একটা শর্ত আছে-- function-টাকে আমরা continuous নিয়েছিলাম। Second fundamental theorem-টা ঠিক এর উল্টো কাজটা করে, প্রথমে differentiate করে, তারপর integrate করে। এখানেও মোটামুটিভাবে গোড়ার function-এই ফেরত আসা যায়। তবে এক্ষেত্রে একটা জটিলতর শর্ত লাগে--differentiate করতে যেটা পাওয়া যাবে, সেটাকে integrate করতে পারতে হবে। এই "integrate করে পারতে হবে" শর্তটাকে অংকের ভাষায় বলে **integrable.** এর পুরো সংজ্ঞাটা আমাদের বইয়ের পাল্লার অনেকটাই বাইরে। আপাততঃ জেনে রাখো যে, একটা function যদি piecewise continuous এবং bounded হয়, তবে সেটা integrable হয়।

Second fundamental theorem of calculus

Let $f(x)$ be a differentiable function with derivative $f'(x)$. If $f'(x)$ is integrable over $[a,b]$, then
$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

যাই হোক, fundamental theorem দুটো আমরা এ বইতে প্রমাণ করব না। আর second fundamental theorem-টাকে আমরা এড়িয়ে চলতেই চেষ্টা করব, কারণ ওর মধ্যে যে integrable শর্তটা আছে, সেটার পূর্ণ সংজ্ঞা আমরা এই বইতে দিতে পারছি না। আমরা যদি খালি fundamental theorem বলি, তবে বুঝবে যে first fundamental theorem-এর কথাই বলছি। সেই theorem-টা ব্যবহার করে এটা দেখা কঠিন নয় কেন signed area বার করার জন্য integration-এর কায়দাটা কাজ করে। ধরো আমাদের বার করতে হবে $\int_a^b f(x)dx$, যেখানে $[a,b]$-র উপরে f-টা continuous. আমাদের কায়দাটা ছিল প্রথমে $f(x)$-এর যা খুশি একটা antiderivative নেওয়া, ধরো $F(x)$. এদিকে fundamental theorem-টার দৌলতে আমরা জানি যে $\int_a^x f(t)dt$-ও $f(x)$-এর একটা antiderivative. তাই $\int_a^x f(t)dt - F(x)$ অবশ্যই একটা constant হবে। ধরো $\int_a^x f(t)dt - F(x) = c$. তাহলে $\int_a^b f(t)dt = F(b) + c$ হবে, আর $\int_a^a f(t)dt = F(a) + c$ হবে। এদিকে $\int_a^a f(t)dt = 0$, তাই $c = -F(a)$ হচ্ছে। সুতরাং $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. ব্যস্!
First fundamental theorem of calculus-টা খুবই কাজের জিনিস। যখনই দেখবে একটা definite integral-এর কোনো প্রান্তে একটা variable রয়েছে, অমনি জানবে fundamental theorem-টা লাগানোর সুযোগ আছে। ব্যাপারটা আমরা ধাপে ধাপে শিখব। প্রথম ধাপে দেখব সেইসব অংক যেখানে variable-টা রয়েছে উপরের প্রান্তে।

Example 17: যদি $f(x) = \int_5^x \frac{e^x}{2+\sin x}\,dx$ হয়, তবে $f'(x) =?$

SOLUTION: ফস্ করে দেখলে মনে হয় যেন এখানে প্রথমে integrate করে $f(x)$ বার করতে হবে, তারপর সেটাকে differentiate করতে হবে। কিন্তু fundamental theorem-টার দৌলতে আসলে কোনোটাই করতে হবে না। ধাঁ করে উত্তর লিখে দেওয়া যাবে
$$f'(x) = \frac{e^x}{2+\sin x}.$$

তবে এই ধাঁ করে উত্তর লিখে দেওয়ার পিছনে একটা ছোট্টো "Terms and conditions apply" আছে। আমাদের theorem-এ একটা শর্ত ছিল এই যে, integrand-টাকে continuous হতে হবে। আমাদের উদাহরণে উপরতলায় e^x আর নীচের তলায় $2+\sin x$ আছে। দুজনেই continuous, এবং নীচের তলাটা কখনোই শূন্য হচ্ছে না। তাই integrand-টাও continuous থাকছে। ■

এই অংকে $2+\sin x$ কখনোই শূন্য হতে পারছিল না, কারণ $\sin x$ সর্বদা ≥ -1 হয়। যদি নীচের তলার জিনিসটা শূন্য হয়েও যেতে পারে, তাও কিন্তু fundamental theorem লাগানো চলত। সেটাই দেখাব নীচের অংকটায়।

Example 18: যদি $f(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{e^x}{\sin x}\,dx$ হয়, তবে $f'(x) =?$

SOLUTION: এটাও ঠিক আগের অংকটারই মত, খালি নীচের তলায় $2+\sin x$-এর বদলে রয়েছে $\sin x$, যেটা শূন্য হতেই পারে। তাহলে এখানে কি আগের মতই $f'(x) = \frac{e^x}{\sin x}$ বলা যাবে না? হ্যাঁ যাবে, কিন্তু তার আগে দেখে নিতে হবে $\frac{\pi}{2}$ থেকে শুরু করে কতদূর পর্যন্ত $\sin x$-টা nonzero থাকছে। এক্ষেত্রে $(0,\pi)$-এর উপরে $\sin x \neq 0$ হয়, তাই $x \in (0,\pi)$-এর জন্য এখানেও fundamental theorem লাগিয়ে বলা যাবে $f'(x) = \frac{e^x}{\sin x}$. ■

প্রশ্ন উঠতে পারে যে $x \notin (0,\pi)$ হলে কিছু বলা যাবে কিনা। উত্তর হল, সেই প্রশ্নটার মানেই দাঁড়ায় না, কারণ যেমন যদি $x = \pi + 1$ হয়, তবে $\left(\frac{\pi}{2}, x\right)$-এর উপরে integrand-টা সর্বত্র defined-ই নয়, তার আবার integral আর তার derivative!

চল্লিশ বছর বিছানাই চোখে দেখলাম না, তা আবার তোষক আর গদি!

--সুকুমার রায়

Exercise 15:

1. $F(x) = \int_0^x \sin(\cos t)\,dt$ হলে $F'(x) = ?$
2. $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ হলে $\frac{d}{dx}F(2x) = ?$

■

এই অংকটার দ্বিতীয় অংশটা করতে পারলে নীচের অংকের কায়দাটার মধ্যে আর নতুন কিছু নেই।

Example 19: ধরো $g(x) = \int_1^{e^x} \cos e^t\,dt$. তাহলে $g'(x) = ?$

SOLUTION: এখানে উপরের প্রান্তে খালি x নেই, আছে e^x. তাই $g(x)$-কে একটু ভেঙে লিখে সুবিধা হবে। যদি উপরের প্রান্তে x থাকত, তবে হত

$$\int_1^x \cos e^t\,dt.$$

ধরো এর নামে দিলাম $F(x)$. তাহলে $g(x) = F(e^x)$. সুতরাং chain rule থেকে পাচ্ছি $g'(x) = F'(e^x) \times \frac{d}{dx}e^x = F'(e^x)e^x$.
এবার $F'(x)$ তো fundamental theorem দিয়েই বেরিয়ে যাবে--

$$F'(x) = \cos e^x.$$

সুতরাং সব মিলিয়ে উত্তর দাঁড়াচ্ছে

$$g'(x) = \cos e^{e^x} e^x.$$

■

নীচের অংকটা তোমার নিজে নিজে করার জন্য।

Exercise 16: $F(x) = \int_a^{x^2} (t-1)(t-2)(t-3)(t-4)\,dt$ হলে $F'(2) = ?$ ■

Exercise 17: Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be given by $f(x) = (x-1)(x-2)(x-5)$. Define

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad x > 0.$$

Then which of the following options is correct?

(A) F has a local minimum at $x = 1$

(B) F has a local maximum at $x = 2$

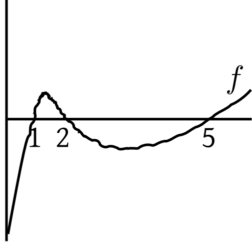


Fig 41

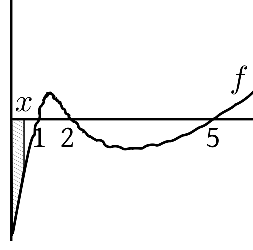


Fig 42

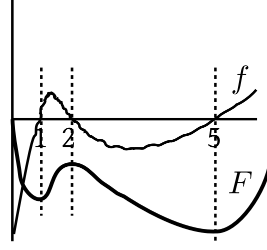


Fig 43

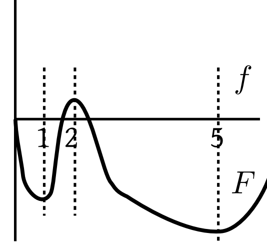


Fig 44

(C) F has two local maxima and one local minimum in $(0, \infty)$

(D) $F(x) \neq 0$ for all $x \in (0, 5)$

(JEE(adv)2019.II7)

HINT:
এখানে একটা definite integral রয়েছে, যার উপরের প্রান্তে x আছে। সেই কারণে fundamental theorem লাগানোর সুযোগ আছে। তবে fundamental theorem-টার ভাষার খুঁটিনাটির চাইতে এখানে fundamental theorem-এর পিছনে যে অ্যানিমেশনের কথা বলেছিলাম (Fig 34 থেকে Fig 37), সেরকম করে ভাবলেই সুবিধা বেশী হবে। প্রথমে $f(x)$-এর গ্রাফটা ভাবো। না, এক্ষুণি তোমাকে গ্রাফ কাগজ নিয়ে অনেক সময় ব্যয় করে গ্রাফ আঁকতে বলছি না। স্রেফ আদলটা পেলেই হবে (Fig 41)। ইচ্ছে করেই এটা আঁকাবাঁকা করে হাতে এঁকেছি। আদলটা কী করে পেলাম শোনো--

- একটা cubic polynomial-এর গ্রাফ একটা ঢেউয়ের মত হয়,
- $1, 2$ আর 5-এ x-axis-কে ছেদ করবে,
- বাঁদিকে $-\infty$-র দিকে যাবে, ডানদিকে ∞-র দিকে।

এবার 0 থেকে x পর্যন্ত শেড করা অঞ্চলটার signed area বার কর (Fig 42)। সেটাই হল $F(x)$. মনে মনে x-কে বাড়াতে থাকো, আর অ্যানিমেশনটা কল্পনা করো। শুরু হচ্ছে $F(0) = 0$ থেকে। যতই x বাড়ছে, $F(x)$ ততই নামছে, কারণ $f(x) < 0$. যখন $x = 1$-এ পৌঁছবে, তখন থেকে $F(x)$-এর উত্থান শুরু হল। উঠছে, উঠছে। যেই $x = 2$-তে এলে, ফের নীচে নামার শুরু। সেই অধঃপতন চলবে $x = 5$ পর্যন্ত। তারপর আর ফিরে তাকাতে হবে না। উঠতেই থাকবে, উঠতেই থাকবে। সুতরাং $F(x)$-এর গ্রাফটা হবে Fig 43-এর মত কিছু একটা।
এই আলোচনা থেকেই তুমি বুঝতে পারবে প্রথম তিনটে option-এর মধ্যে কে বা কারা ঠিক। কিন্তু (D)-কে নিয়ে একটু সমস্যা আছে। খালি হাতে $F(x)$-এর যে আদলটা এঁকেছি, সেটা দেখলে মনে হচ্ছে যেন (D)-টা ঠিক। কিন্তু আদলটা আঁকার সময়ে খালি ওঠানামার কথাই খেয়াল রেখেছিলাম, কতটা উঠছে বা নামছে, সেটা কিন্তু হিসেব রাখি নি। যদি 0 থেকে 1 অব্দি যতটা নেমেছিল, 1 থেকে 2 পর্যন্ত তার চেয়ে বেশী উঠে থাকে, তবে ছবিটা হত Fig 44-এর মত। সেক্ষেত্রে (D) কিন্তু ভুল হত। ছবিটা Fig 43-এর মত হবে, নাকি Fig 44-এর মত সেটা বোঝার জন্য $F(2)$ বার করাই যথেষ্ট। সেটা গায়ের জোরে কষে ফেলা খুব একটা কঠিন কিছু নয়। কষেই দ্যাখো। যদি $F(2) < 2$ হয়, তবে (D) ঠিক, নইলে (D) ভুল।
■

Example 20: The total number of distinct $x \in [0, 1]$ for which $\int_0^x \frac{t^2}{1+t^4}\, dt = 2x - 1$ is...

(JEE(adv)2016.52)

SOLUTION: এখানে দুটো function-এর সমান হওয়া নিয়ে আলোচনা হচ্ছে। প্রথমে দুজনের নাম দিয়ে নিলে সুবিধা হবে।

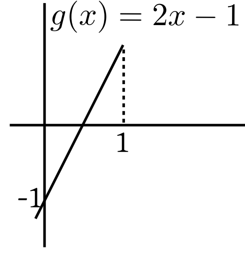


Fig 45

> Let
> $$f(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t^4}\,dt \text{ and } g(x) = 2x - 1.$$

ছবি দিয়ে ভাবলে, আমাদের কাজ হল $[0, 1]$-এর উপরে এদের গ্রাফ দুটোর মধ্যে কতবার মোলাকাত হচ্ছে বার করা। এদের মধ্যে $g(x)$-এর গ্রাফ তো ফস্ করে এঁকে ফেলা যাবে (Fig 45)। কিন্তু $f(x)$-এর গ্রাফ আঁকা মোটেই সহজ মনে হচ্ছে না। আচ্ছা, কোথাও কি $f(x)$-এর value সহজে বার করা যায়? হ্যাঁ--

> Clearly, $f(0) = 0$.

কারণ তখন integral-টার দুই প্রান্তেই 0 থাকবে। সুতরাং $f(x)$-এর গ্রাফের উপরে একটা বিন্দু অন্ততঃ পাওয়া গেল। যেহেতু $f(x)$-এর সংজ্ঞাটা একটা definite integral দিয়ে, আর তার এক প্রান্তে x আছে, তাই fundamental theorem লাগানোর সুযোগ রয়েছে। তা থেকে পাব--

> Then, by the fundamental theorem of calculus, $f(x)$ is differentiable with $f'(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$.

এ থেকে কী লাভ হল? যেহেতু differentiable, সুতরাং গ্রাফটা একটা একটানা লাইন হবে, এবং কোথাও কোনো খোঁচ থাকবে না। আরো লক্ষ করো $f'(x)$-টা negative হতে পারে না--

> Since $f'(x) > 0$, for $x > 0$, hence $f(x)$ is increasing.

তার মানে $(0, 0)$ থেকে শুরু করে গ্রাফটা উপরের দিকে খানিকটা উঠবে। নামতে পারবে না মোটেই। আরো লক্ষ করো--

> Also, $f'(x)$ is increasing from 0 to $\frac{1}{2}$ as x goes from 0 to 1.

এখানে $f'(x)$-টা increasing কিনা, সেটা পরীক্ষা করার জন্য তাকাতে হবে $f'(x)$-এর derivative, মানে $f''(x)$-এর দিকে--

> ⟦ Because:
>
> $f''(x) = \cdots = \frac{2(x-x^5)}{(1+x^4)^2} \geq 0$ for $x \in [0, 1]$,
> and $f'(1) = \frac{1}{2}$.
>
> ⟧

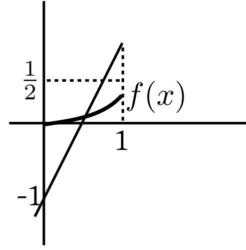


Fig 46

Thus $f'(x) \le \frac{1}{2}$.

সুতরাং x যখন 0 থেকে 1 পর্যন্ত যাবে, তখন $f(x)$ খুব বেশী হলে $\frac{1}{2} \times (1-0) = \frac{1}{2}$ পর্যন্ত উঠতে পারে। এই জায়গাটা ভালো করে ছবি দিয়ে ভেবে বুঝে নাও। খুঁটিয়ে লেখার সময়ে mean value theorem লাগাতে হবে।

So $f(1) \le \frac{1}{2}$.

⟦ Because:

Let, if possible, $f(1) > \frac{1}{2}$. Then $\frac{f(1)-f(0)}{1-0} > \frac{1}{2}$.
By mean value theorem, $\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f'(c)$ for some $c \in (0,1)$.
So $f'(c) > \frac{1}{2}$ $\left(\Rightarrow\Leftarrow \because f'(x) \le \frac{1}{2}\right)$.

⟧

সব মিলিয়ে $f(x)$-এর গ্রাফের একটা মোটামুটি আদল পাচ্ছি, যেটা Fig 46-এ দেখিয়েছি। বুঝতেই পারছ, $f(x)$ আর $g(x)$-এর ঠিক একবারই সাক্ষাৎ হচ্ছে। তাই উত্তর হবে 1. সেটা গুছিয়ে লেখার জন্য দুই ধাপে এগোব। প্রথম ধাপে দেখাব যে অন্ততঃ একবার সাক্ষাৎ হয়। দ্বিতীয় ধাপে দেখাব যে একাধিক বার সাক্ষাৎ হতে পারে না।

Since $f(0) > g(0)$ and $f(1) < g(1)$, and f, g are both continuous,
hence by the intermediate value theorem, $f(c) = g(c)$ at some $c \in (0,1)$.

ব্যস্, প্রথম ধাপ শেষ। এখানে যদি intermediate value theorem-এর কথা শুনে ঘাবড়ে গিয়ে থাকো, তবে চট্ করে ব্যাপারটা মনে করিয়ে দিই। মনে করো সীতাকে ঘিরে লক্ষ্মণ একটা গণ্ডী এঁকে দিয়েছেন। কোথাও কোনো ফাঁক নেই, মানে continuous. এবার রাবণকে যদি বাইরে থেকে সেই গণ্ডীর মধ্যে ঢুকতে হয়, তবে কোথাও একটা গণ্ডীটাকে পেরোতেই হবে, ঠিক? এইটাই হল intermediate value theorem-এর মূল কথা। এখানে যেন $g(x)$-এর গ্রাফটা একটা গণ্ডী, ঠিক গোল নয় অবশ্য, তাই বেড়া বলে ভাবতে পারো। $f(x)$-টা হল রাবণ। শুরুতে সে বেড়ার এক দিকে আছে ($f(0) > g(0)$), সে যেতে চায় বেড়ার অন্য দিকে ($f(1) < g(1)$)। সুতরাং কোথাও একটা বেড়া না ডিঙিয়ে গত্যন্তর নেই!
এবার দ্বিতীয় ধাপ। এখানে ফের একটু কল্পনাশক্তি লাগালে সুবিধা হবে। মনে করো যেন $f(x)$ আর $g(x)$ হল দুই দৌড়বীর। এর মধ্যে $g(x)$ হল খরগোশ, দৌড়য় বেশী জোরে কারণ $g'(x) \equiv 2$, আর $f(x)$ হল কচ্ছপ, দৌড়য় একটু আস্তে, কারণ $f'(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. এদিকে $f(x)$ দৌড় শুরু করেছে $f(0) = 0$ থেকে, কিন্তু $g(x)$ শুরু করেছে $g(0) = -1$ থেকে। তার মানে শুরুতে খরগোশটা পিছিয়ে ছিল। কিন্তু যেহেতু ওর বেগ বেশী, তাই ও কচ্ছপটাকে ওভারটেক করে বেরিয়ে গেছে। তা, একবার ওভারটেক করার পর আর ওদের মধ্যে দেখা হবে কী করে? তার জন্য কচ্ছপটাকে তো ফের খরগোশটাকে ধরে ফেলতে হবে। সেটা তো আর হচ্ছে না (না, এটা ঈশপের গল্পের সেই নিদ্রাকাতর খরগোশটা নয়!)। এই ব্যাপারটাই অংকের ভাষায় অনুবাদ করলে হবে mean value theorem-র একটা প্রয়োগ--

> Let, if possible, $f(x) = g(x)$ for some $c_1 < c_2 \in [0, 1]$.
> Let $h(x) = g(x) - f(x)$.
> Then $h(c_1) = h(c_2)$.
> So by mean value theorem $h'(\phi) = 0$ for some $\phi \in (c_1, c_2)$.
> Hence $g'(\phi) = f'(\phi)$ $(\Rightarrow\Leftarrow \because f'(x) \leq \frac{1}{2}$ and $g'(x) \equiv 2)$.

সুতরাং ওদের মধ্যে ঠিক একবারই দেখা হচ্ছে।

> Hence the answer is 1.

■

এতক্ষণ আমরা fundamental theorem-এর যা যা অংক করলাম, সেখানে definite integral-টার উপরের প্রান্তে x থাকছিল। যদি নীচের প্রান্তে x থাকে, তবে কী করবে? সেটাই এবার আলোচনা করব।

5.1 নীচে x থাকলে

নীচে x থাকলে সেটাকে উল্টে উপরে তুলে আনলেই চলবে, এই সূত্রটা ব্যবহার করে--

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

একটা উদাহরণ দেখা যাক।

Example 21: $f(x) = \int_x^9 \cos(\sin(e^t))\,dt$ হলে $f'(x) = ?$

SOLUTION: $f(x) = \int_x^9 \cos(\sin(e^t))\,dt = -\int_9^x \cos(\sin(e^t))\,dt$. এবার fundamental theorem লাগালেই হবে--

$$f'(x) = -\cos(\sin(e^x)).$$

■

Exercise 18: নীচের প্রতিক্ষেত্রে $f'(x)$ বার করো।

1. $f(x) = \int_x^0 \frac{t}{1+t}\,dt$.
2. $f(x) = \int_{2x}^9 e^{-t^2/2}\,dt$.
3. $f(x) = \int_{\cos x}^2 e^{-t+5\cos t}\,dt$.

■

Exercise 19: If $\int_0^x f(t)\,dt = x^2 + \int_x^1 t^2 f(t)\,dt$, then $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ is

(A) $\frac{6}{25}$

(B) $\frac{24}{25}$

(C) $\frac{18}{25}$

(D) $\frac{4}{5}$

(JEE(main)2019)

HINT:

বলেছে

$$\int_0^x f(t)\,dt = x^2 + \int_x^1 t^2 f(t)\,dt.$$

এর দুই দিককে differentiate করে পাচ্ছি--

$$f(x) = 2x - x^2 f(x),$$

মানে

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

অতএব $f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. এবার তুমিই বলো কোন্ option-টা হবে। ■

একটা definite integral-এর উপরের প্রান্তে x থাকলে কী করতে হয় দেখেছি, নীচের প্রান্তে থাকলেও সামলাতে পারব। কিন্তু যদি দু প্রান্তেই থাকে? তবে কি আমাদেরও সেই হুঁকোমুখো হ্যাংলার দশা হবে? না, সেখানেও পথ আছে, আমরা integral-টাকে কোথাও একটা কেটে দুভাগ করে নেব। একটা উদাহরণ দেখাই।

বসে যদি ডাইনে, লেখে মোর আইনে
এই ল্যাজে মাছি মারি ত্রস্ত
বামে যদি বসে তাও নহি আমি পিছপাও
এই ল্যাজে আছে তার অস্ত্র
যদি দেখি কোনো পাজী বসে ঠিক মাঝামাঝি
কী যে করি ভেবে নাহি পাইরে
ভেবে দেখো এ কি দায় কোন্ ল্যাজে মারি তায়
দুটি বই ল্যাজ মোর নাই রে!

--হুঁকোমুখো হ্যাংলা (সুকুমার রায়)

Example 22: ধরো $f(x) = \int_x^{2x} \frac{t}{1+t}\,dt$. তবে $f'(x)$ কী হবে?

SOLUTION: ধরো আমরা 0-তে কেটে দুভাগ[2] করব--

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{t}{1+t}\,dt = \int_x^0 \frac{t}{1+t}\,dx + \int_0^{2x} \frac{t}{1+t}\,dt = -\int_0^x \frac{t}{1+t}\,dx + \int_0^{2x} \frac{t}{1+t}\,dt.$$

এবার আর সমস্যা নেই, কারণ দুটো অংশেই x আছে খালি এক প্রান্তে। এটাকে চাইলে $-F(x) + F(2x)$ বলে ভাবতে পারো, যেখানে

$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt.$$

এই $F(x)$-এর derivative তো অনায়াসেই বেরিয়ে যাবে fundamental theorem দিয়ে--

$$F'(x) = \frac{x}{1+x}.$$

এদিকে $f'(x) = -F'(x) + 2F'(2x)$. সুতরাং $f'(x)$ বার করে ফেলতে আর কতক্ষণ? ■

[2] $\int_a^b$-কে কেটে দুভাগ করে $\int_a^c + \int_c^b$ করার জন্য কিন্তু c-কে a আর b-এর মাঝামাঝি না থাকলেও চলবে।

Example 23: Let $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ be a differentiable function such that for all $x\in(0,\infty)$,

$$f(2x)=f(x).$$

Show that the function g defined by the equation

$$g(x)=\int_x^{2x} f(t)\frac{dt}{t} \quad \text{for } x>0$$

is a constant function. **(ISI(2018).4)**

SOLUTION: এখানে g-টা একটা interval-এর উপরে defined. তাই সর্বত্র $g'(x)=0$ দেখালেই হয়ে যাবে।

> For $x>0$ we have
>
> $$g(x)=\int_x^{2x} f(t)\frac{dt}{t}=\int_0^{2x} f(t)\frac{dt}{t}-\int_0^{x} f(t)\frac{dt}{t}=F(2x)-F(x),$$
>
> where
>
> $$F(x)=\int_0^x f(t)\frac{dt}{t}.$$
>
> By the fundamental theorem of calculus,
>
> $$F'(x)=\frac{f(x)}{x}.$$
>
> So
>
> $$g'(x)=2F'(2x)-F'(x)=\frac{2f(2x)}{2x}-\frac{f(x)}{x}=0,$$
>
> since $f(2x)=f(x)$.

■

Example 24: Let $F(x)=\int_x^{x^2+\frac{\pi}{6}} 2\cos^2 t\,dt$ for all $x\in\mathbb{R}$ and $f:\left[0,\frac{1}{2}\right]\to[0,\infty)$ be a continuous function. For $a\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ if $F'(a)+2$ is the area of the region bounded by $x=0$, $y=0$, $y=f(x)$ and $x=a$, then $f(0)$ is ... **(JEE(adv)2015.I48)**

SOLUTION: অংকটা পড়তে গেলেই কেমন যেন কান্না পেয়ে যায়! এখানে $F(x)$-এর সংজ্ঞায় যে definite integral-টা রয়েছে, তার দুই প্রান্তেই x-ওয়ালা জিনিস আছে। তাই দুইভাগে ভেঙে নিলে সুবিধা হবে--

> Given: $F(x)=\int_x^{x^2+\frac{\pi}{6}} 2\cos^2 t\,dt=G\left(x^2+\frac{\pi}{6}\right)-G(x)$, where
>
> $$G(x)=\int_0^x 2\cos^2 t\,dt.$$

এবার তাহলে $F(x)$-কে differentiate করবার জন্য $G(x)$-কে differentiate করতে পারলেই হবে। এবং সে কাজটা সহজ--

By the fundamental theorem of calculus,

$$G'(x) = 2\cos^2 x.$$

Hence, by chain rule,

$$F'(x) = G'\left(x^2 + \tfrac{\pi}{6}\right) \times \frac{d}{dx}\left(x^2 + \tfrac{\pi}{6}\right) - G'(x) = 2\cos^2\left(x^2 + \tfrac{\pi}{6}\right) \times 2x - 2\cos^2 x.$$

অংকটায় যে শর্ত দিয়েছে, সেটা F আর f-এর মধ্যে একটা সম্পর্ক স্থাপন করে--

The given condition says

$$\int_0^a f(x)\,dx = F'(a) + 2.$$

Hence, by the fundamental theorem,

$$f(a) = F''(a).$$

আমাদের বলেছে $f(0)$ বার করতে, মানে $F''(0)$ বার করতে। আমরা $F'(x)$-এর ফর্মুলা জানি, সেটাকে differentiate করে $x = 0$ বসালেই হবে--

$$\begin{aligned} F''(x) &= \frac{d}{dx}\left[4x\cos^2\left(x^2 + \tfrac{\pi}{6}\right) - 2\cos^2 x\right] \\ &= 4\cos^2\left(x^2 + \tfrac{\pi}{6}\right) - 8x\cos\left(x^2 + \tfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(x^2 + \tfrac{\pi}{6}\right) \times 2x + 4\cos x \sin x \end{aligned}$$

এর চেয়ে বেশী গুছিয়ে লেখার দরকার নেই, কারণ আমাদের দরকার খালি $F''(0)$. যেই $x = 0$ বসাবে, অমনি অনেক কিছুই শূন্য হয়ে যাবে--

So

$$F''(0) = 4\cos^2\tfrac{\pi}{6} = 3.$$

■

DAY 6
Fundamental theorem of calculus (part 2)

6.1 Mean value theorem for integrals

এবার আমরা fundamental theorem-টার একটা প্রয়োগ দেখব, যেটা অনেক সময়েই কাজে লাগে, আর ছবি দিয়ে বুঝতেও সহজ। মনে করো একটা পাত্রে জল পড়ছে ট্যাপ থেকে (Fig 47)। প্রথম যখন জলটা ছলাৎ করে পড়বে, তখন জলের

তলটা ঢেউ খেলিয়ে উঠবে। যখন জল পড়া বন্ধ হবে, তখন সব কিছু শান্ত হলে সেই একই পরিমাণ জলের উপরের তলটা horizontal হয়ে স্থির হবে (Fig 48)। প্রথমে যে ঢেউ খেলানো তলটা ছিল সেটাকে যদি কোনো $f(x)$-এর গ্রাফ বলে ভাবি, তবে শান্ত হবার পর আমরা তার জায়গায় একটা constant function পাচ্ছি (Fig 49)। যেহেতু দুই ক্ষেত্রেই জলের পরিমাণ সমান, তাই অবশ্যই

$$\int_a^b f(x)\,dx = c\cdot(b-a),$$

মানে

$$c = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

এবার ভেবে দ্যাখো গোড়াতে যে $f(x)$-টা ছিল, সেটা নিশ্চয়ই কোথাও c-এর উপরে ছিল, এবং কোথাও c-এর নীচে ছিল। বস্তুতঃ উঁচু অংশের জলটা নীচু অংশে গিয়ে শান্ত হয়েই তো c পাওয়া গেছে! এদিকে $f(x)$ একটা continuous function (জলের তলে তো আর ভাঙা থাকতে পারে না!)। সুতরাং intermediate value theorem বলছে কোথাও একটা $f(x)$-এর গ্রাফটা c দিয়ে টানা horizontal লাইনটাকে ছেদ করেছে, মানে এমন একটা θ পাবে, যাতে $c = f(\theta)$ হয় (Fig 50)। এই কথাটাকে বলে **mean value theorem for integrals.** তোমরা differentiation শেখার সময়ে এক ধরণের mean value theorem শিখেছিলে, সেটাকে বলতে পারো mean value theorem for differentiation. এই differentiation-এর mean value theorem-টা ব্যবহার করেই integral-এর mean value theorem-টা প্রমাণ করা যায়।

Mean value theorem for integrals

Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be a continuous function. Then there is a number $\theta\in(a,b)$ such that

$$f(\theta) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Proof:

Let $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.
Then by the fundamental theorem of calculus, we have $F'(t) = f(t)$ for $t\in(a,b)$. Also, $F(t)$ is continuous over $[a,b]$.

সত্যি কথা বলতে কি, এটা আমরা প্রমাণ করি নি মোটেই। প্রমাণটা যে খুব জটিল এমন নয়, কিন্তু আমরা যেমন fundamental theorem-টা প্রমাণ করি নি, তেমনি এটার প্রমাণও বাদ রাখব এই বইতে।

Fig 47

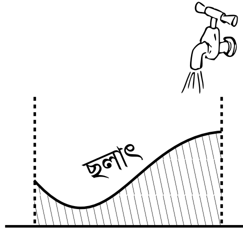


Fig 48

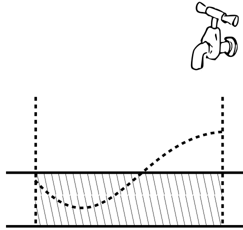


Fig 49

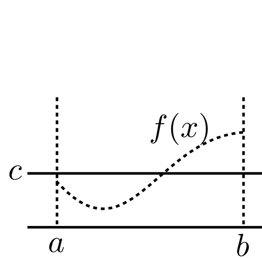
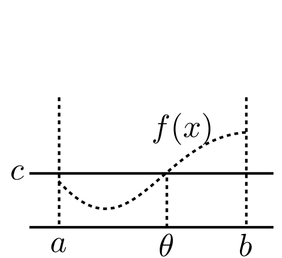


Fig 50



So, by the mean value theorem for differentiation,

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(\theta) \text{ for some } \theta \in (a,b).$$

Now $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)$ and $F(a) = 0$. Also $F'(\theta) = f(\theta)$.
So

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\theta),$$

as required.

[Q.E.D]

এবারের অংকটা এরই একটা সহজ প্রয়োগ।

Example 25: Let $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ be a non-decreasing continuous function. Show then that the inequality

$$(z-y)\int_x^y f(u)\,du \le (y-x)\int_y^z f(u)\,du$$

holds for any $0 \le x < y < z$.

SOLUTION: যেকোনো $0 \le x < y < z$ নিয়ে কাজ করতে হবে। সেরকম x, y, z নিয়ে শুরু করি।

Take any $0 \le x < y < z$.
To show:

$$(z-y)\int_x^y f(u)\,du \le (y-x)\int_y^z f(u)\,du,$$

এটাকে সামান্য সাজিয়ে লিখলে mean value theorem-এর চেহারাটা দেখতে পাবে--

ie,

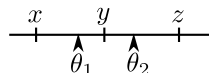
$$\frac{1}{y-x}\int_x^y f(u)\,du \le \frac{1}{z-y}\int_y^z f(u)\,du.$$

Now, by the mean value theorem for integrals,

$$\frac{1}{y-x}\int_x^y f(u)\,du = f(\theta_1) \text{ and } \frac{1}{z-y}\int_y^z f(u)\,du = f(\theta_2)$$

for some $\theta_1 \in (x,y)$ and $\theta_2 \in (y,z)$.

যেহেতু $x < y < z$, তাই $\theta_1 < \theta_2$ হবে। যদি গুলিয়ে গিয়ে থাকে, তবে এই ছবিটা দেখে নাও--



Since f is non-decreasing, and $\theta_1 < \theta_2$, hence $f(\theta_1) \leq f(\theta_2)$.

Hence the result.

■

নীচের অংকটা এই একই যুক্তির জটিলতর রূপ।

Example 26: Let $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ be a non-decreasing continuous function. Show then that the inequality

$$(z - x) \int_y^x f(u)\, du \geq (x - y) \int_x^z f(u)\, du$$

holds for any $0 \leq x < y < z$. **(ISI(2014).7)**

SOLUTION: এই সমাধানটা পড়ার আগে আগের অংকের সমাধানটা পড়ে নিতে ভুলো না। এবার ওটার সঙ্গে এই অংকটার পার্থক্যটা লক্ষ করো। আগের অংকে যেখানে $z - y$ ছিল, এখানে তার জায়গায় আছে $z - x$. তেমনি $\int_y^z$-এর বদলে আছে $\int_x^z$.

Take any $0 \leq x < y < z$.

To show:

$$(z - x) \int_y^x f(u)\, du \geq (x - y) \int_x^z f(u)\, du,$$

এখানে $x < y$, তাই $(x - y)$ না লিখে $(y - x)$ লিখলে একটু বেশী স্বচ্ছন্দ বোধ করব। একইভাবে $\int_y^x$-এর বদলে $\int_x^y$ লিখলে মনটা ভালো লাগবে।

ie,

$$(z - x) \int_x^y f(u)\, du \leq (y - x) \int_x^z f(u)\, du,$$

দু দিকেরই চিহ্ন উল্টেছে বলে $\geq$-টাও উল্টে $\leq$ হয়ে গেল। এইবার $(z - x)$ আর $(y - x)$ দিয়ে ভাগ করব। এরা দুজনেই > 0, তাই inequality-টার দিক আর নতুন করে ওল্টাবে না--

ie,

$$\frac{1}{y - x} \int_y^x f(u)\, du \leq \frac{1}{z - x} \int_x^z f(u)\, du.$$

Now, by the mean value theorem of integrals,

$$\frac{1}{y - x} \int_x^y f(u)\, du = f(\theta_1) \text{ and } \frac{1}{z - y} \int_y^z f(u)\, du = f(\theta_2)$$

for some $\theta_1 \in (x, y)$ and $\theta_2 \in (y, z)$.

লক্ষ করো, আমরা কিন্তু দ্বিতীয় ক্ষেত্রে আগের অংকের মতই (y, z)-এর উপর কাজ করছি, (x, z)-এর উপরে নয়। এদিকে আমাদের এই অংকটায় কাজ করার কথা ছিল $\frac{1}{z-x} \int_x^z f(u)\, du$ নিয়ে। সুতরাং $\int_x^z f(u)\, du$-কে প্রথমে $\int_x^y f(u)\, du + \int_y^z f(u)\, du$ হিসেবে ভেঙে লিখে নিলে সুবিধা হবে।

Also,

$$\frac{1}{z-x}\int_x^z f(u)\,du = \frac{\int_x^y f(u)\,du + \int_y^z f(u)\,du}{z-x} = \frac{(y-x)f(\theta_1)+(z-y)f(\theta_2)}{(y-x)+(z-y)} = \alpha f(\theta_1)+(1-\alpha)f(\theta_2),$$

where $\alpha = \frac{(y-x)}{(y-x)+(z-y)} \in (0,1)$, since $x<y<z$.

খামোখা এভাবে লিখলাম কেন? কারণ, এ থেকে বোঝা যাবে $f(\theta_1)$ আর $f(\theta_2)$-এর সাপেক্ষে $\frac{1}{z-x}\int_x^z f(u)\,du$-এর অবস্থান কোথায়। ব্যাপারটা খুলে বলি। ধরো $\alpha = \frac{1}{2}$. তাহলে $\alpha f(\theta_1)+(1-\alpha)f(\theta_2)$ হবে $f(\theta_1)$ আর $f(\theta_2)$-এর ঠিক মধ্যিখানে--

$f(\theta_1)$ 1:1 $f(\theta_2)$

$\frac{1}{2}f(\theta_1)+\frac{1}{2}f(\theta_2)$

যদি $\alpha = \frac{1}{3}$ হত, তাহলেও $\alpha f(\theta_1)+(1-\alpha)f(\theta_2)$ পড়ত $f(\theta_1)$ আর $f(\theta_2)$-এর মাঝখানে, কিন্তু $f(\theta_2)$-র দিক ঘেঁসে--

$f(\theta_1)$ 2:1 $f(\theta_2)$

$\frac{1}{3}f(\theta_1)+\frac{2}{3}f(\theta_2)$

এইভাবে $\alpha \in (0,1)$ যাই হোক না কেন, সর্বদাই $\alpha f(\theta_1)+(1-\alpha)f(\theta_2)$ থাকবে $f(\theta_1)$ আর $f(\theta_2)$-এর মাঝামাঝি কোথাও।

Since f is non-decreasing, and $\theta_1<\theta_2$, hence $f(\theta_1)\le f(\theta_2)$.

So $f(\theta_1) \le \alpha f(\theta_1)+(1-\alpha)f(\theta_2)$, as required.

■

6.2 গোলমেলে অংক

First fundamental theorem-টা বলে যে, আগে definite integral করে, তারপরে differentiate করলে আমরা মূল function-এই ফিরে আসি (যদি মূল function-টা continuous হয়)। ঠিক যেন definite integration আর differentiation মোটামুটিভাবে কাটাকাটি হয়ে যায় ("মোটামুটিভাবে" বললাম, কারণ f-টা continuous না হলে কাটাকাটিটা নাও হতে পারে)। একইভাবে second fundamental theorem-টা বলে যে, প্রথমে differentiate আর পরে integrate করলেও একধরণের কাটাকাটি হয়, $f(x)$ যদি differentiable হয়, তবে $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a)$ হতে পারে। সেখানেও একটা "মোটামুটি"-র গল্প আছে, $f'(x)$-কে integrable হতে হবে। এই শর্তটার পুরো সংজ্ঞা আমাদের বইয়ের আওতার মধ্যে আসে না বলেই আমরা এই theorem-টাকে এড়িয়ে চলছি। আমরা খালি এটুকুই বলেছি যে, যদি $f(x)$-টা bounded, piecewise continuous function হয়, তবে সেটা integrable হবে। এখন $f(x)$ যদি differentiable হয়, তাও $f'(x)$-টা যে একটা bounded, piecewise continuous function হবে, সেটা মোটেই বলা যায় না। সেই কারণে যেকোনো differentiable $f(x)$-এর জন্যই ধাঁ করে $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a)$ লিখে দেওয়া যায় না। নীচের দুটো competitive পরীক্ষার প্রশ্ন অবশ্য এইসব শর্তের বাউণ্ডারী পার করে বেমালুম ছক্কা করে বসেছে, সম্ভবতঃ প্রশ্নকর্তার অসতর্কতার

সুযোগে। দুই ক্ষেত্রেই integrand দুটো হল কোনো কিছুর derivative. অন্ধের মত $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$ লাগিয়ে দিলেই অংকগুলো হয়ে যাবে। কিন্তু $f'(x)$-টা আদৌ integrable হচ্ছে কিনা, তার গ্যারান্টি দেওয়া যাচ্ছে না মোটেই।

Example 27: Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a differentiable function such that $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ and $f'(0) = 1$. If

$$g(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} (f'(t)\operatorname{cosec} t - \cot t \operatorname{cosec} t f(t))\,dt$$

for $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, then $\lim_{x\to 0} g(x) = ...$ **(JEE(adv)2017)**

SOLUTION: অংকটায় কোথায় গলদ আছে, সেটা চট্ করে চোখেই পড়ে না। মনে হয় যেন একটাই খালি প্যাঁচ আছে, সেটা হল integrand-টাকে কোনো কিছুর derivative বলে চিনতে পারা--

> We have
> $$f'(t)\operatorname{cosec} t - \cot t \operatorname{cosec} t f(t) = \frac{d}{dt}(f(t)\operatorname{cosec} t).$$

ব্যস্, তার মানে প্রশ্নের integral-টা হয়ে যাচ্ছে $\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{dt}(f(t)\operatorname{cosec} t)\,dt$, আর integral এবং differentiation "কাটাকাটি হয়ে যায়" বলে নিশ্চয়ই $g(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(x)\operatorname{cosec} x$ হবে! না, এখানেই সমস্যা। কাটাকাটি হয় কিনা দেখার আগে পরীক্ষা করা উচিত $\frac{d}{dt}(f(t)\operatorname{cosec} t)$-কে আদৌ integrate করা যায় কিনা। এবং তার কায়দাকানুন আমাদের সিলেবাসের বাইরে। মগজাস্ত্র যদি লাগানো না যায়, তবে পড়ে থাকে গোঁজাস্ত্র-- চুপিচুপি ধরে নেওয়া যে, এই $\frac{d}{dt}(f(t)\operatorname{cosec} t)$-টা integrable হবে। সম্ভবতঃ প্রশ্নকর্তারও মনে সেটাই ছিল--

> So, <u>assuming $f'(t)\operatorname{cosec} t - \cot t \operatorname{cosec} t f(t)$ to be integrable,</u>
> $$g(x) = f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - f(x)\operatorname{cosec} x = 3 - \frac{f(x)}{\sin x}.$$
> So
> $$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} g(x) &= 3 - \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x} \\ &= 3 - \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \times \frac{x}{\sin x} \\ &= 3 - \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \quad [\because \tfrac{x}{\sin x} \to 1 \text{ as } x \to 0] \\ &= 3 - \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad [\because f(0) = 0] \\ &= 3 - f'(0) = 3 - 1 = 2. \end{aligned}$$

■

Example 28: The integral

$$\int_1^0 \left\{\left(\frac{x}{e}\right)^{2x} - \left(\frac{e}{x}\right)^x\right\} \log_e x\,dx$$

is equal to

(A) $\frac{1}{2} - e - \frac{1}{e^2}$

(B) $\frac{3}{2} - \frac{1}{e} - \frac{1}{2e^2}$

(C) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{e} - \frac{1}{2e^2}$

(D) $\frac{3}{2} - e - \frac{1}{2e^2}$

(JEE(main)2019)

SOLUTION: এখানে লক্ষ করো integrand-এর মধ্যে দুইবার $\left(\frac{x}{e}\right)^{ax}$ জাতীয় জিনিস রয়েছে। যদি $a = 2$ বসাই, তবে পাব $\left(\frac{x}{e}\right)^{2x}$, আর যদি $a = -1$ বসাই, তবে আসবে $\left(\frac{e}{x}\right)^{x}$. আমরা আন্দাজ করছি যে, integrand-টাকে কোনো কিছুর derivative আকারে লেখা যাবে। এই আন্দাজটা একবারেই অবশ্য আমার মাথায় আসে নি, খানিকক্ষণ এলোমেলো চেষ্টা করার পর মাথায় এসেছে। তার জন্য প্রথমে $\left(\frac{x}{e}\right)^{ax}$ চেহারাটাকে differentiate করে দেখি, তাহলেই integrand-এর $\log x$-টা পেয়ে যাবে--

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{e}\right)^{ax} = \frac{d}{dx}e^{ax(\log(x)-1)} = e^{ax(\log(x)-1)}a\log x = a\left(\frac{x}{e}\right)^{ax}\log x.$$

এবার যদি $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$ হয় ধরে নিয়ে এগোই, তবে অমনি লিখে ফেলতে লোভ হবে--

$$\int_1^0 \left(\frac{x}{e}\right)^{ax}\log x\,dx \stackrel{☹}{=} \frac{1}{a}\left(\frac{x}{e}\right)^{ax}\Big|_1^0 = \frac{1}{a}(1 - e^{-a}).$$

ইশ্, গোঁজার উপর গোঁজা। প্রথমতঃ, এখানে integrand-টা bounded-ই নয়, কারণ যতই $x \to 0+$ হবে, ততই integrand-টা ছুটবে $-\infty$-র দিকে। এরকম integral-কে বলে **improper integral**. যারা অংক নিয়ে আরো পড়াশোনা করবে, তারা পরে শিখবে এদের কায়দাকানুন। দ্বিতীয়তঃ, 0^0 মোটেই 1 নয়। আসলে $\lim_{x\to 0+} x^x = 1$. সেটাই চুপিচুপি এখানে ব্যবহার করেছি। ব্যস্, অমনি অংকটা "নেমে যাবে"--

$$\int_1^0 \left\{\left(\frac{x}{e}\right)^{2x} - \left(\frac{e}{x}\right)^{x}\right\}\log_e x\,dx \stackrel{☹}{=} \int_1^0 \left(\frac{x}{e}\right)^{2x}\log_e x\,dx - \int_1^0 \left(\frac{x}{e}\right)^{-x}\log_e x\,dx$$

$$\stackrel{☹}{=} \frac{1}{2}(1 - e^{-2}) - \frac{1}{-1}(1 - e) = \frac{3}{2} - e - \frac{1}{2}e^{-2}.$$

কিন্তু তার জন্য আগে দেখানো দরকার $f'(x)$-টা bounded, piecewise continuous. সেটা হবে, কিন্তু পরীক্ষা করে দেখা এই বইয়ের পাল্লার বাইরে। কিন্তু MCQ-তে আর কে এত সব দেখতে আসছে? অতএব "MCQ ঠাকুরের জয়" বলে উত্তর (D) লিখে দিলেই হবে। ইন্টারনেটে এক জায়গায় এই অংকটার একটা সমাধান দেখেছি, যেখানে substitution নামে একটা কায়দা[3] লাগানো হয়েছে। কিন্তু সেখানেও চুপিচুপি একই গোঁজা রয়েছে। ■

[3] আমরা substitution শিখব পরের অধ্যায়ে।

DAY 7
সহজ বুদ্ধির অংক (part 1)

কোনো definite integral বার করার সময়ে সর্বদাই যে প্রথমে antiderivative বার করে আরম্ভ করতে হবে, এমন কিন্তু কোনো কথা নেই। যদি definite integral-টাকে কোনো অঞ্চলের signed area বলে ভাবো, তবে অনেক সময়ে জ্যামিতির কায়দা দিয়েই উত্তর বার করে দেওয়া যায়। এরকম বিভিন্ন অংক আলোচনা করাই আজকে আমাদের উদ্দেশ্য।

7.1 Rectangle জুড়ে বানানো

Area বার করার জন্য integration-এর কায়দাটা ছাত্রদের মনে এমন গেঁথে যায়, যে অনেকে ছোটোবেলায় শেখা সহজ জ্যামিতির সূত্রগুলো একেবারে ব্যবহারই করতে চায় না। কিন্তু সহজ সহজ shape-এর বেলায় সেগুলো ব্যবহার করাই বুদ্ধিমানের কাজ। কয়েকটা এরকম উদাহরণ দিচ্ছি।

Example 29: $\int_{-\frac{1}{2}}^{2}[x]dx$ বার করো, যেখানে $[x]$ হল largest integer $\leq x$.

SOLUTION: অনেক ছাত্রই এই অংকটা দেখে "ওরে বাবারে, $[x]$-কে কী করে আবার integrate করব!" বলে কান্নাকাটি জুড়ে দেবে। অথচ গ্রাফটা এঁকে দ্যাখো, ব্যাপারটা Fig 51-এর মত, ধাপে ধাপে সিঁড়ির মত উঠে গেছে। প্রতিটা ধাপের উচ্চতা 1. শেড করা জায়গাটা দিব্যি দুটো rectangle জুড়ে তৈরী। এদের area বার করার জন্য খামোখা integration-এর দরকার নেই। প্রথম rectangle-টার area হল $\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$, আর দ্বিতীয়টার $1\times 1=1$. এদের মধ্যে প্রথমটা আছে x-axis-এর নীচে, তাই signed area হবে জ্যামিতিক area-এর negative, মানে $-\frac{1}{2}$. অতএব উত্তর হবে $-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$. ■

Exercise 20: Let $\{x\}$ denote $x-[x]$ for a real number x, where $[x]$ is the largest integer $\leq x$. For example, $\{1.3\}=0.3$ and $\{-1.3\}=-1.3-[-1.3]=-1.3-(-2)=0.7$. Find $\int_{-3}^{4}\{\frac{x}{2}\}dx$.

HINT:

এখানে $\{x\}$ হল যাকে বলে x-এর fractional part, অর্থাৎ integer অংশটা বাদ দিলে যা পড়ে থাকে। যখন $x=0$, তখন $\{x\}=0$. যেই x-টা 0.1, 0.2, 0.3 এইভাবে বাড়বে, $\{x\}$-ও সমান তালে বাড়বে। তাই গ্রাফটা $y=x$-এর মত 45° লাইনটার মতই শুরু হবে। কিন্তু যেই $x=1$ হবে, অমনি $\{x\}$-টা ঝপ করে লাফ মেরে ফের 0 হয়ে যাবে। তার পর $x=1.1,1.2$ ইত্যাদি হলে আবার $\{x\}=0.1,0.2$ ইত্যাদি হয়ে বাড়তে থাকবে। সব মিলিয়ে গ্রাফটা হবে Fig 52-এর মত। যখন $\left\{\frac{x}{2}\right\}$ চাইবে, তখন $\{x\}$-এর গ্রাফটাকে horizontal দিক বরাবর দ্বিগুণ ছড়িয়ে দিলেই হবে। অতএব যে integral-টা বার করতে বলেছে সেটা হল Fig 53-এর শেড করা অঞ্চলটার area. ■

Exercise 21: The value of

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{[x]+[\sin x]+4},$$

where $[t]$ denotes the greatest integer less than or equal to t, is

Fig 51

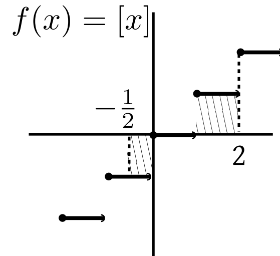


Fig 52

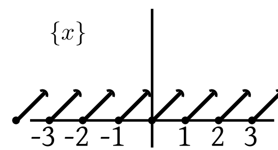
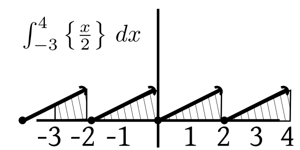


Fig 53



(A) $\frac{1}{12}(7\pi + 5)$

(B) $\frac{3}{10}(4\pi - 3)$

(C) $\frac{1}{12}(7\pi - 5)$

(D) $\frac{3}{20}(4\pi - 3)$

(JEE(main)2019)

HINT:

মনে রেখো $\pi \approx 3.14$, তাই $\frac{\pi}{2} \approx 1.6$. সুতরাং $[\frac{\pi}{2}] = 1$ এবং $[-\frac{\pi}{2}] = -2$.

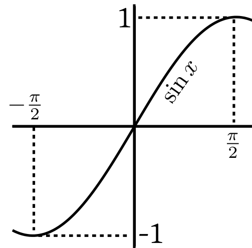
> Here, for $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
>
> $$[x] = \begin{cases} -2 & \text{if } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, -1\right) \\ -1 & \text{if } x \in [-1, 0) \\ 0 & \text{if } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{if } x \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

এবার $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$-এর উপরে $\sin x$-এর গ্রাফটা কীরকম একটু মনে করে নাও (Fig 54)। একটু চিন্তা করলেই এবার বুঝবে কী করে আমরা $[\sin x]$-এর জন্য নীচের জিনিসটা পাচ্ছি--

> Also,
>
> $$[\sin x] = \begin{cases} -1 & \text{if } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ 0 & \text{if } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 1 & \text{if } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$
>
> So the integrand is
>
> $$\begin{cases} 1 & \text{if } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, -1\right) \\ \frac{1}{2} & \text{if } x \in [-1, 0) \\ \frac{1}{4} & \text{if } x \in [0, 1) \\ \frac{1}{5} & \text{if } x \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{1}{6} & \text{if } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

এবার আশা করি বুঝতে পারছ যে, যে integral-টা বার করতে বলেছে সেটা কয়েকটা rectangle-এর area যোগ করেই বার করে দেওয়া যাবে। করেই দ্যাখো!

Fig 54



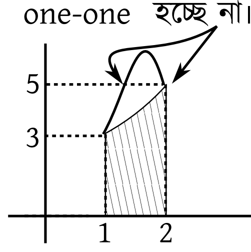


Fig 55

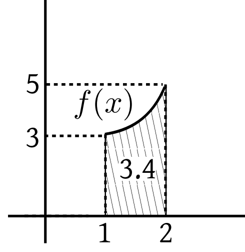


Fig 56

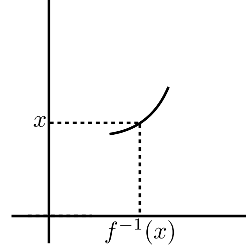


Fig 57

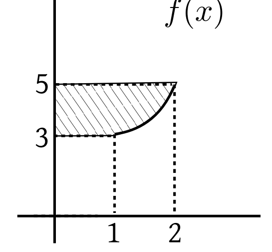


Fig 58

■

এবারের অংকটা আমি ফোন মারফত পেয়েছিলাম একজন ছাত্রের কাছ থেকে। অংকটা পুরো মনে নেই, মূল ধারণাটা খালি মনে আছে, তার ভিত্তিতেই বলছি।

Example 30: একটা continuous function দেওয়া আছে $f : [1, 2] \to [3, 5]$ যেখানে $f(1) = 3$ এবং $f(2) = 5$. বলা আছে যে, f একটা one-one function. যদি $\int_1^2 f(x)\, dx = 3.4$ হয়, তবে $\int_3^5 f^{-1}(x)\, dx$ কত হবে?

SOLUTION: প্রথমে একটা ছবি এঁকে নেওয়া যাক। আমাদের অবশ্য $f(x)$-এর কোনো ফর্মুলা বলে দেয় নি, তাই খালি আদলটুকুই আঁকতে পারব। বলে দিয়েছে continuous, তার মানে একটানা একটা লাইন হবে $(1, 3)$ থেকে $(2, 5)$ পর্যন্ত। যেহেতু one-one, তাই কোনো horizontal লাইন গ্রাফটাকে একাধিকবার ছেদ করতে পারে না, তাই Fig 55-এর মত হতে পারে না। মানে একবার উপরে উঠলে আর নামতে পারবে না (বা একবার নীচে নামলে আর উঠতে পারবে না)। এখানে $f(1) < f(2)$ দিয়েছে, তাই উপরে তো উঠতে হবেই। সুতরাং গ্রাফটা কোথাওই আর নীচে নামতে পারবে না। অতএব ছবিটা এখানে হবে Fig 56-এর মত কিছু একটা। লক্ষ করো $f(x)$-টা আসলে onto-ও হয়ে যাচ্ছে। তাই f^{-1}-এর অস্তিত্ব নিয়ে সন্দেহ নেই। এখন শেড করা অঞ্চলটার signed area বলা আছে 3.4. এবার ভালো করে চিন্তা করে দ্যাখো f^{-1}-এর গ্রাফটা কীরকম হবে। যদি x-axis আর y-axis-এর স্থানবিনিময় করে দাও, তবে f-এর গ্রাফটাই হয়ে যাবে f^{-1}-এর গ্রাফ। সুতরাং আমরাই যদি একটু কষ্ট করে x-axis-টাকে y-axis, আর y-axis-টাকে x-axis কল্পনা করে নিই, তাহলেই f^{-1}-এর গ্রাফের চেহারাটা পেয়ে যাব (Fig 57)। সুতরাং $\int_3^5 f^{-1}(x)\, dx$ হবে Fig 58-এর শেড করা অঞ্চলের signed area. এবার ভেবে দ্যাখো Fig 56 আর Fig 58-এর শেড করা অঞ্চল দুটো মিলে তৈরী হচ্ছে Fig 59-এর মত একটা ছবি, যেটা দুটো rectangle মিলিয়ে তৈরী বলে ভাবা যেতে পারে। এর মোট area তো দেখাই যাচ্ছে $1 \times 3 + 2 \times 2 = 7$. সুতরাং Fig 58-এর শেড করার অঞ্চলটার area হবে $7 - 3.4 = 3.6$. সেটাই উত্তর। ■

একইরকম আরেকটা অংক তোমার জন্য দিই এবার।

Exercise 22: আগের অংকটাই, খালি এবার $f(1) = 5$ আর $f(2) = 3$. এখানেও $\int_1^2 f(x)\, dx = 3.4$. তোমাকে বার করতে হবে $\int_3^5 f^{-1}(x)\, dx$. ■

Fig 59

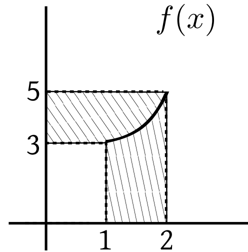
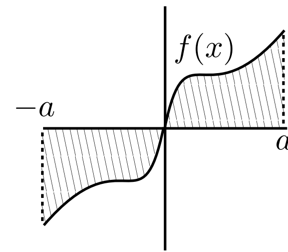


Fig 60



7.2 Odd, even

কোনো কোনো ক্ষেত্রে গ্রাফের উপর একবার চোখ বুলিয়েই integral-টা বলে দেওয়া যায়, যেমন নীচের অংকটায়।

Example 31: Fig 60 দেখে বলো $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ কত হবে।

SOLUTION: দুটো শেড করা অঞ্চল একেবারে একইরকম দেখতে, খালি পরস্পরের সঙ্গে উল্টো করে বসানো। একজন আছে x-axis-এর উপরে, অন্যজন নীচে। তাই ওদের signed area কাটাকাটি হয়ে উত্তর হবে 0. লক্ষ করো, এখানে a কত বা $f(x)$-এর ফর্মুলা কী, এসব কিছুই জানতে হল না। ■

এখানে যে দুটো জিনিস কাজে লাগল, তার প্রথমটা হল এই যে, integration-টা করা হচ্ছে $-a$ থেকে a পর্যন্ত, মানে 0-র বাঁদিকে যতটা, ডানদিকেও ঠিক ততটাই। আর দ্বিতীয়টা হল, $f(-x) = -f(x)$. যে সব function-এর এই ধর্মটা আছে যাদের বলে **odd function**. উদাহরণ হল x, x^3, x^5 বা অন্য যেকোনো odd power (বস্তুতঃ এই কারণেই odd function নাম হয়েছে)। আরেকটা উদাহরণ হল $\sin x$. যদি $f(-x) = f(x)$ হত, তবে f-কে বলতাম একটা **even function**, যেমন x^2, x^4 বা x-এর যেকোনো even power. যেকোনো constant function-ও একটা even function-এর উদাহরণ। আরো দুটো উদাহরণ হল $\cos x$ আর $|x|$.

Exercise 23: যদি $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ একটা odd function হয়, তবে $f(0)$ কত হতে বাধ্য? ■

নীচের অংকটায় বলা আছে odd আর even function-দের মিলিয়ে কী করে আরো odd আর even function বানানো যায়।

Exercise 24: দেখাও যে--

1. দুটো odd function-কে যোগ বা বিয়োগ করলে বা negative নিলে ফের একটা odd function-ই হয়।
2. দুটো even function-কে যোগ বা বিয়োগ করলে বা negative নিলে ফের একটা even function-ই হয়।
3. দুটো even function-কে গুণ করলে আবার even-ই পাবে।
4. দুটো odd function-কে গুণ করলে কিন্তু মোটেই odd হবে না, even হয়ে যাবে।
5. একটা even আর একটা odd function-কে গুণ করলে একটা odd function পাওয়া যায়।
6. যেকোনো function-এর পেটে একটা even function ঢুকিয়ে দিলে একটা even function পাওয়া যায়, মানে f যদি even হয়, তবে যেকোনো g-এর জন্যই $g(f(x))$ অবশ্যই even হবে। এরকম কোনো কিছু কিন্তু odd-এর বেলায় বলা যায় না। তবে even-এর পেটে odd ঢোকালে ফের even পাবে।

■

Odd-even-এর এইসব কাণ্ডকারখানা মাথায় রাখলে অনেক অংকই কষে ফেলা যায় চট্ করে। মূলমন্ত্র একটাই--

> THEOREM
> If $f(x)$ is an odd function, and $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ exists, then $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

এখানে ওই "exists" শর্তটা দেখে ঘাবড়ে যেও না। আমরা আগেই বলেছি যে, যেকোনো $f(x)$-এর জন্যই definite integral -টা exist নাও করতে পারে। ঠিক কখন exist করবে, তার খুঁটিনাটি এই বইয়ের পাল্লার বাইরে। আমরা খালি এটুকুই বলেছি যে, f যদি piecewise continuous এবং bounded হয় (মানে $f(x)$-এর গ্রাফটা কেবল কয়েকটা continuous টুকরো জুড়ে তৈরী হয়, এবং ∞ বা $-\infty$-র দিকে হাত না বাড়ায়), তবে definite integral-টা exist করবেই।

Example 32: $\int_{-1}^{1} |x| \sin x \, dx = ?$

SOLUTION: এখানে $|x|$ হল even, আর $\sin x$ হল odd. তাই ওদের গুণফল $|x| \sin x$ হবে odd. আমরা integrate করছি -1 থেকে 1 পর্যন্ত, মানে শূন্যর এদিকেও যতটা ওদিকেও ততটাই। তাই definite integral-টা 0 হতে বাধ্য। ■

এবার সামান্য জটিল সংস্করণ একটা। ব্যাপারটা এখানেও একই, খালি odd function-টাকে একটু লুকিয়ে রাখার চেষ্টা করা হয়েছে, এই যা।

Exercise 25: The area of the region

$$A = \left[(x, y) \ : \ 0 \le y \le x|x| + 1 \text{ and } -1 \le x \le 1\right]$$

in sq. units, is

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) 2

(D) $\frac{4}{3}$

(JEE(main)2019)
HINT:
এইভাবে ভেঙে নাও--

$$\int_{-1}^{1} x|x| + 1 \, dx = \int_{-1}^{1} x|x| \, dx + \int_{-1}^{1} dx.$$

কোনো odd function চোখে পড়ছে? ■

কিছু কিছু odd function আছে, যাদের চট্ করে চেনা যায় না। তাই যদি কোনো $\int_{-a}^{a}$-জাতীয় definite integral দ্যাখো, যেখানে integrand-টাকে প্রথম দর্শনেই odd মনে হচ্ছে না, সেখানেও একটু কষ্ট করে পরীক্ষা নেওয়া ভালো সেটা চুপিচুপি odd হচ্ছে কিনা। নীচের অংকে এরকম একটা "ছুপে রুস্তম"-এর উদাহরণ রয়েছে।

Example 33: The value of the integral

$$\int_{-2}^{2} \frac{\sin^2 x}{\left[\frac{x}{\pi}\right] + \frac{1}{2}} \, dx,$$

(where $[x]$ denotes the greatest integer less than or equal to x) is

(A) 4

(B) $4 - \sin 4$

(C) $\sin 4$

(D) 0.

(JEE(main)2019)
SOLUTION: এখানে উপরতলায় আছে $\sin^2 x$, যেটা একটা even function. আমরা কাজ করছি $[-2,2]$-এর মধ্যে। মনে রেখো $\pi \approx 3.14$. তাই সেখানে $[\frac{x}{\pi}]$ হল এইরকম--

$$\left[\frac{x}{\pi}\right] = \begin{cases} -1 & \text{if } x < [-2,0) \\ 0 & \text{if } x \in [0,2] \end{cases}.$$

সুতরাং

$$\left[\frac{x}{\pi}\right] + \frac{1}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{if } x < [-2,0) \\ \frac{1}{2} & \text{if } x \in [0,2] \end{cases}.$$

লক্ষ করো এটা কিন্তু পুরো odd function নয়, কারণ $x = 0$ নিলে $f(-x) = f(0) = \frac{1}{2}$ অথচ $-f(-x) = -f(0) = -\frac{1}{2}$. সুতরাং $f(0) \neq -f(-0)$. অবশ্য 0 ছাড়া সর্বত্রই $f(-x) = -f(-x)$ হচ্ছে। আমরা জানি যে, একটা বিন্দুতে function-টাকে বদলে দিলেও তার integral বদলাবে না, কারণ সেই বিন্দুর উপরে যে লাইনটা আছে, তার signed area তো শূন্য! অতএব এখানে integrand-টা একটা odd function-এর মতই আচরণ করবে। তাই উত্তর হবে 0. ■

Odd আর even function-এর ব্যাপারটা আসলে symmetry-র একটা প্রয়োগ। কিন্তু symmetry-টা যে 0-কে ঘিরেই হতে হবে, এমন কোনো কথা নেই। যেমন Fig 61-এ symmetry-টা হয়েছে $x = 3$-কে ঘিরে, কিন্তু এখানেও একই যুক্তিতে $\int_2^4 f(x)\,dx = 0$ হবে।

Example 34: Let f and g be continuous functions on $[0,a]$ such that $f(x) = f(a-x)$ and $g(x) + g(a-x) = 4$. Then $\int_0^a f(x)g(x)\,dx$ is equal to

(A) $4\int_0^a f(x)dx$

(B) $2\int_0^a f(x)dx$

(C) $-3\int_0^a f(x)dx$

(D) $\int_0^a f(x)dx$

(JEE(main)2019)
SOLUTION: এখানে $f(x) = f(a-x)$ শর্তটার মানে হল f-টা $\frac{a}{2}$-কে কেন্দ্র করে Fig 62-এর মত symmetric. একইভাবে যদি কোনো $h(x)$-এর বেলায় $h(x) = -h(a-x)$ হত, মানে $h(x) + h(a-x) = 0$ হত, তবে h হত $\frac{a}{2}$-কে কেন্দ্র করে Fig 63-এর মত symmetric. এখানে অবশ্য বলেছে $g(x) + g(a-x) = 4$. যদি $h(x) = g(x) - 2$ নিই, তবেই লক্ষ করো $h(x) + h(a-x) = 0$ পেয়ে যাবে। সুতরাং

$$\int_0^a f(x)g(x)\,dx = \int_0^a f(x)h(x)\,dx + 2\int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Fig 61

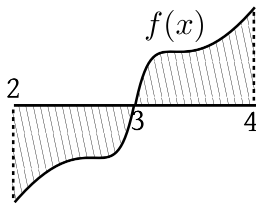


Fig 62

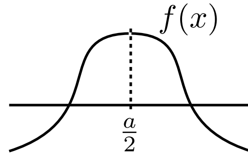
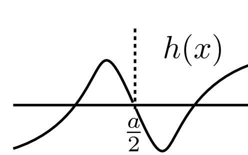


Fig 63



অতএব (B) হল উত্তর। ■

এবার একটা অন্য স্বাদের অংক দিই। এখানেও odd function-এর উল্লেখ আছে বটে, কিন্তু এটাকে ঠিক সহজ বুদ্ধির অংক বলা যায় না।

Example 35: Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be a continuous odd function, which vanishes exactly at one point and $f(1)=\frac{1}{2}$. Suppose that $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ for all $x\in[-1,2]$ and $G(x)=\int_{-1}^{x} t|f(f(t))|\,dt$ for all $x\in[-1,2]$. If $\lim_{x\to 1}\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{1}{14}$, then the value of $f\left(\frac{1}{2}\right)$ is... **(JEE(adv)2015.II47)**

SOLUTION: এখানে $\lim_{x\to 1}\frac{F(x)}{G(x)}$-র উল্লেখ দেখে প্রথমেই মনে হয় ওটাকে $\frac{\lim_{x\to 1}F(x)}{\lim_{x\to 1}G(x)}$ হিসেবে বার করা যায় কিনা। এখন $\lim_{x\to 1}F(x)$ বার করাটা অতি সহজেই হয়, যদি $F(x)$-টা continuous হয়, কারণ তাহলে $\lim_{x\to 1}F(x)=F(1)$ হবে। সৌভাগ্যক্রমে আমাদের $F(x)$-টা সত্যিই continuous--

> By the fundamental theorem of calculus, $F(x)$ and $G(x)$ are differentiable and so continuous.

অতএব--

> Hence $\lim_{x\to 1}F(x)=F(1)$ and $\lim_{x\to 1}G(x)=G(1)$.

এবার তবে $F(1)$ আর $G(1)$ বার করার চেষ্টা করি। $F(1)=\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$. যেহেতু f-কে odd বলা আছে। অতএব--

> Here $F(1)=\int_{-1}^{1} f(t)\,dt=0$ by the oddness.

এদিকে $f(f(x))$-ও হল একটা odd function, কারণ $f(f(-x))=f(-f(x))=-f(f(x))$. সুতরাং $|f(f(x))|$ হল even. অতএব $x|f(f(x))|$ হবে odd. সুতরাং--

> Similarly, $G(1)=\int_{-1}^{1} t|f(f(t))|\,dt=0$ since $x|f(f(x))|$ is also odd.
> So $\lim_{x\to 1}F(x)=F(1)=0$ and $\lim_{x\to 1}G(x)=G(1)=0$.

যাঃ, উপরনীচ দুদিকেই যে শূন্য হয়ে গেল। তবে তো $\lim_{x\to 1}\frac{F(x)}{G(x)}$ একটা $\frac{0}{0}$-জাতীয় limit হয়ে গেল! এরকম limit-কে ঘায়েল করার একটা অস্ত্র হল L'ôpital's rule--

> So, by L'ôpital,
>
> $$\lim_{x\to 1}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x|f(f(x))|}=\frac{f(1)}{\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|}=\frac{1}{2\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|}.$$

বলা ছিল যে $\lim_{x\to 1}\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{1}{14}$. তার মানে--

> Since $\lim_{x\to 1}\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{1}{14}$, hence $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|=7$.

অতএব $f\left(\frac{1}{2}\right)$ হবে 7 নয়তো -7. এবার তবে চিহ্নটা স্থির করা যাক।

> Since f vanishes exactly once, and is odd, so f vanishes exactly at $x = 0$.

কারণ $f(0) = f(-0) = -f(0) \implies f(0) = 0$.

> Also, it is continuous. So it must preserve sign over $(0, \infty)$.

এটা বুঝলে তো? একটা continuous function তো আর ধাঁ করে এক লাফে positive থেকে negative হয়ে যেতে পারে না, তাকে কোথাও একটা x-axis-টাকে ছেদ করতে হয়। কিন্তু সেটা তো হতে পারছে না, কারণ $x \neq 0$ হলে $f(x) \neq 0$. তাই পুরো $(0, \infty)$-র উপরেই f-টা হয় > 0 আর নয়তো পুরো $(0, \infty)$ জুড়েই < 0. বলা আছে $f(1) > 0$, তাই পুরোটা জুড়েই > 0 হবে।

> Since $f(1) > 0$ hence $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.
> So $f\left(\frac{1}{2}\right) = 7$.

■

DAY 8
সহজ বুদ্ধির অংক (part 2)

8.1 নানারকম transformation

8.1.1 উল্টে বসানো

যখন কোনো definite integral বার করবে, সেটাকে একটা signed area বার করা বলে কল্পনা করা ভালো। যে অঞ্চলটার signed area বার করছ, সেটা মনে করো যেন একটা কার্ডবোর্ড কেটে তৈরী (Fig 64)। যদি সেই কার্ডবোর্ডের টুকরোটাকে ঘুরিয়ে ফিরিয়ে বসাও, তবে তার area তো একই থাকবে। এই ব্যাপারটা মাথায় রাখলে অনেক অংক সহজে করা যায়। কিছু উদাহরণ দেখি।

Example 36: Fig 65 আর Fig 66-এ যে দুটো শেড করা অঞ্চল দেখিয়েছি, ওরা আসলে একটা আরেকটাকে উল্টে বসানো, তাই ওদের area সমান হতে বাধ্য। যদি Fig 65-এর function-টাকে $f(x)$ নাম দিই, তবে Fig 66-এর function-টাকে $f(x)$ ব্যবহার করে প্রকাশ করো। এ থেকে definite integral বার করার একটা গুরুত্বপূর্ণ সূত্র পাওয়া যায়। সেটা কী?

Fig 64

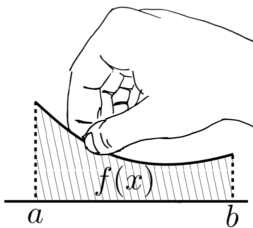


Fig 65

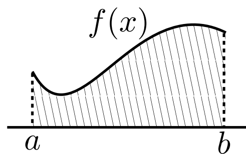
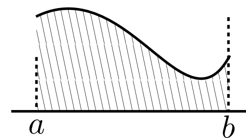


Fig 66



SOLUTION: ধরো এই "উল্টে বসানো $f(x)$"-এর নাম দিলাম $g(x)$. যেহেতু উল্টে বসানো, তাই $f(x)$-র বেলায় বাঁদিকে যেটা হয়, $g(x)$-এর বেলায় সেটাই হবে ডানদিকে। যেমন $f(a)$ হল $g(b)$-র সমান। একইভাবে $f(a+0.1)$ হবে $g(b-0.1)$-এর সমান। সুতরাং যদি কোনো x নাও, তবে প্রথমে দেখে নাও সেটা a-র কতটা ডানদিকে আছে। ওল্টানোর পরে সেটা b-এর ততটা বাঁদিকে থাকবে--

$a \quad + \quad (x-a)$	→	$b \quad - \quad (x-a)$
a-র ডানদিকে যতটা		b-র বাঁদিকে ততটা

তাই $g(x) = f(b-(x-a))$ হবে, অর্থাৎ $g(x) = f(a+b-x)$.
গুরুত্বপূর্ণ সূত্রটা হল $\int g(x)\,dx = \int f(x)\,dx$, অর্থাৎ--

THEOREM

$$\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

■

এই সূত্রটা অন্ততঃ দুভাবে আমাদের কাজে লাগে। প্রথমতঃ অনেক সময়ে দেখা যায় যে, $\int_a^b f(x)\,dx$ বার করার চেয়ে $\int_a^b f(a+b-x)\,dx$ বার করা সহজ। সেক্ষেত্রে এই সূত্রটা ব্যবহার করে আমরা ঘুরপথে $\int_a^b f(x)\,dx$ পেয়ে যেতে পারি। দ্বিতীয়তঃ, যদি দুটো integral-ই সমান কঠিন হয়, তাও অনেক সময়ে ওদের যোগফলটা, মানে $\int_a^b f(x)+f(a+b-x)\,dx$ বার করা সহজ হয়। রকম ক্ষেত্রে আমরা প্রথমে যোগফলটা বার করে তার অর্ধেক নিলেই $\int_a^b f(x)\,dx$ পেয়ে যাব। এই দুই রকমের উদাহরণই এবার দেখব আমরা।

Example 37: $\int_0^1 x(1-x)^{100}dx = ?$

SOLUTION: এখানে $a=0$ আর $b=1$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x(1-x)^{100}dx &= \int_0^1 (0+1-x)\big(1-(0+1-x)\big)^{100}\,dx \\
&= \int_0^1 (1-x)x^{100}\,dx
\end{aligned}$$

লক্ষ করো, এই integral-টা কিন্তু সহজেই করে ফেলা যাবে।

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 x^{100}dx - \int_0^1 x^{101}dx \\
&= \frac{1}{101} - \frac{1}{102} = \frac{1}{10302}.
\end{aligned}$$

■

Exercise 26: নীচের integral-গুলো বার করো।

1. $\int_0^2 (2-x)^{50}\, dx$.
2. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\left(\frac{5\pi}{3} - 5x\right)\, dx$.
3. $\int_1^2 \frac{dx}{(3-x)^5}$.

■

অনেক সময়ে একটা integral-কে ওল্টানোর পরও সহজ হয় না। কিন্তু এরকম ক্ষেত্রেও কখনো কখনো ওল্টালে কাজ হয়। সেরকম কিছু উদাহরণ দেখাই এবার।

Example 38: The integral

$$\int_2^4 \frac{\log x^2}{\log x^2 + \log(36 - 12x + x^2)}\, dx$$

is equal to

(A) 2

(B) 4

(C) 1

(D) 6

(JEE(main)2015)
SOLUTION: এখানে $36 - 12x + x^2$ দেখে প্রথমেই $(6-x)^2$-এর কথা মনে পড়া উচিত। Integral-টার দুই প্রান্তে আছে 2 আর 4, যাদের যোগ করলে আবার $6-x$-এর 6-টা হয়। তাই $a = 2$ আর $b = 4$ নিয়ে যদি x-এর জায়গায় $a+b-x$ বসাই, তবে x আর $(6-x)$-এর মধ্যে স্থানবিনিময় হবে। অতএব কার্ডবোর্ড ওল্টানোর কায়দাটা চেষ্টা করে দেখলে হয়।

$$\int_2^4 \frac{\log x^2}{\log x^2 + \log(36 - 12x + x^2)}\, dx = \int_2^4 \frac{\log x^2}{\log x^2 + \log(x-6)^2}\, dx$$

এবার কার্ডবোর্ড ওল্টাব।

ফলে x আর $6-x$-গুলোর স্থানবিনিময় হবে।

$$= \int_2^4 \frac{\log(x-6)^2}{\log x^2 + \log(x-6)^2}\, dx.$$

লক্ষ করো, নীচের তলার কোনো পরিবর্তন হয় নি। হঠাৎ মনে হতে পারে, এতে আর সুবিধা কী হল! কিন্তু আসলে সুবিধা হয়েছে। যদি দুটো integral-এর যোগফল বার করি, সেটা কিন্তু অতি সহজ একটা integral হবে--

Now

$$\int_2^4 \frac{\log x^2}{\log x^2 + \log(x-6)^2}\, dx + \int_2^4 \frac{\log x^2}{\log x^2 + \log(x-6)^2}\, dx = \int_2^4 dx = 2.$$

So the original integral is $\frac{2}{2} = 1$.

উত্তর হল তাহলে (C). ■

আরেকটা একইরকম অংক দেখা যাক।

Example 39: The value of

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+2^x}\,dx$$

is

(A) $\frac{\pi}{8}$

(B) $\frac{\pi}{2}$

(C) 4π

(D) $\frac{\pi}{4}$

(JEE(main)2018)

SOLUTION: ধরো definite integral-টার নাম দিলাম I, মানে

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+2^x}\,dx.$$

এটাকে ওল্টানো মানে সব কিছু অপরিবর্তিত রেখে, খালি integrand-এর মধ্যে x-এর জায়গায় $-x$ বসানো। তাহলে পাবে--

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+2^{-x}}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \sin^2 x}{1+2^x}\,dx.$$

এটা তো আবার সেই গোড়ার integral-টার মতই দেখতে লাগছে, সহজতর তো মনে হচ্ছে না! কিন্তু মজা দ্যাখো, যদি I-এর দুটো রূপকে যোগ করে দিই, তবে পাবে--

$$2I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \sin^2 x}{1+2^x}\,dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+2^x}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx.$$

এটা তো দিব্যি সহজ জিনিস--

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos 2x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

তাই $I = \frac{\pi}{4}$. ■

Exercise 27: নীচের integral-গুলো বার করো।

1. $\int_0^1 \frac{\sin^5(1-x)}{\sin^5(1-x)+\sin^5 x}\,dx$.

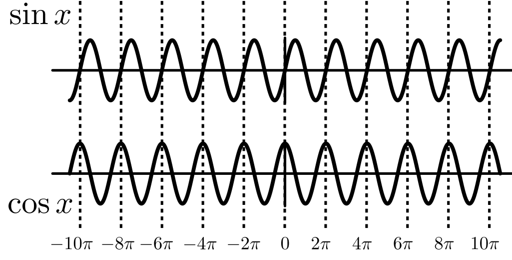


Fig 67

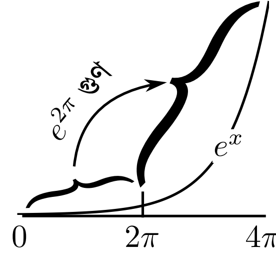


Fig 68

2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sin^5(1-x)-\sin^5 x}$.

3. $\int_a^b \frac{f(x)}{f(a+b-x)+f(x)}\,dx$, যেখানে $f(x) = e^{\cos x}$.

■

8.1.2 Periodic function

তোমরা জানো যে $\sin x$ আর $\cos x$ হল **periodic function**, অর্থাৎ একই value একটা নির্দিষ্ট অন্তরে বার বার ফিরে ফিরে আসে। ওদের গ্রাফগুলোর ঢেউয়ের মত চেহারা (Fig 67) দেখেই সেটা মালুম হয়। লক্ষ করো ওদের **period** (মানে একটা ঢেউয়ের দৈর্ঘ্য) হল 2π. সুতরাং যদি বলি

$$\frac{\int_a^b \sin x + 5\cos x\,dx}{\int_{a+2\pi}^{b+2\pi} \sin x + 5\cos x\,dx}$$

বার করতে, তবে a, b জানবারও প্রয়োজন হবে না। তুমি একবারেই বলতে পারবে যে উত্তর হবে 1, কারণ উপরের আর নীচের integral দুটো সমান হতে বাধ্য। এই ব্যাপারটারই সামান্য জটিল সংস্করণ হল নীচের অংকটা।

Example 40:

$$\frac{\int_0^{2\pi} e^x(\sin x + 5\cos x)\,dx}{\int_{2\pi}^{4\pi} e^x(\sin x + 5\cos x)\,dx} = ?$$

SOLUTION:এখানে অবশ্য e^x-টা মোটেই periodic নয়। তাই integrand-এর e^x দুই ক্ষেত্রে আলাদা হবে। তবে ওদের মধ্যে একটা সম্পর্ক থাকবে, এইরকম--

> $[0, 2\pi]$-এর উপরে যা হবে, $[2\pi, 4\pi]$-এর উপরে হবে তার ঠিক $e^{2\pi}$ গুণ। Fig 68 দেখে ব্যাপারটা বুঝে নাও।

তাই উত্তর হবে $e^{-2\pi}$.
যদি প্রশ্ন করো এই পুরো যুক্তিটা কী করে লিখে ফেলতে হবে, তবে মুশকিলে পড়ে যাব। কারণ লিখে বোঝানোর জন্য substitution বলে একটা কায়দা জানা দরকার, সেটা আসবে পরের অধ্যায়ে। ■

Exercise 28: The option(s) with the values of a and L that satisfy the following equation is(are)

$$\frac{\int_0^{4\pi} e^t(\sin^6 at + \cos^4 at)\,dt}{\int_0^{\pi} e^t(\sin^6 at + \cos^4 at)\,dt} = L?$$

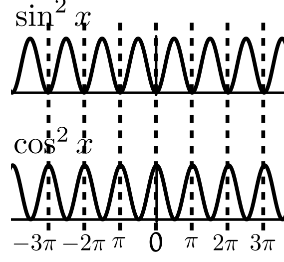


Fig 69

(A) $a = 2,\ L = \frac{e^{4\pi}-1}{e^{\pi}-1}$

(B) $a = 2,\ L = \frac{e^{4\pi}+1}{e^{\pi}+1}$

(C) $a = 4,\ L = \frac{e^{4\pi}-1}{e^{\pi}-1}$

(D) $a = 4,\ L = \frac{e^{4\pi}+1}{e^{\pi}+1}$

(JEE(adv)2015.II53)
HINT: এই সমাধানটা পড়ার আগে আগের অংকদুটো করে নিতে ভুলো না। সেখানে আমরা এই তথ্যটা ব্যবহার করেছিলাম যে, $\sin x$ আর $\cos x$ দুজনেই periodic, এবং period হল 2π. এবার লক্ষ করো যে, $\sin^2 x$ আর $\cos^2 x$-ও periodic, কিন্তু ওদের period হল π. এটা কেন হচ্ছে বুঝে নাও--যদি $\sin x$ বা $\cos x$-এর একটা ঢেউ নাও, তার দুটো অর্ধেক, ওরা দেখতে অবিকল একইরকম, খালি একজন x-axis-এর উপরে অন্যজন নীচে। যখন তুমি square করছ, তখন পুরোটাই x-axis-এর উপরে চলে আসছে। তাই ঢেউয়ের অর্ধেক দুটো একেবারেই একই হয়ে যাচ্ছে, তাই ওরা নিজেরাই এখন একেকটা ঢেউ। ছবি দেখতে চাইলে Fig 69 দেখে নাও।
উপরের তলার integral-টাকে চারভাগে ভেঙে লেখো--

$$\begin{aligned}
& \int_0^{4\pi} e^t(\sin^6 at + \cos^4 at)\,dt \\
= & \int_0^{\pi} e^t(\sin^6 at + \cos^4 at)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} e^t(\sin^6 at + \cos^4 at)\,dt \\
& \quad + \int_{2\pi}^{3\pi} e^t(\sin^6 at + \cos^4 at)\,dt + \int_{3\pi}^{4\pi} e^t(\sin^6 at + \cos^4 at)\,dt.
\end{aligned}$$

যেহেতু প্রতিটা option-এই a হল একটা integer, এবং sin আর cos-এর মাথায় even power আছে (6 আর 4), তাই $(\sin^6 at + \cos^4 at)$ অংশটা চার ক্ষেত্রেই একই থাকবে। কিন্তু e^t অংশটা বদলে যাবে। কীভাবে বদলাবে সেটাও আমরা আগের অংকেই দেখেছি--

> $[0, \pi]$-এর উপরে যা হবে, $[\pi, 2\pi]$-এর উপরে হবে তার ঠিক e^{π} গুণ।

সুতরাং দ্বিতীয় integral-টা হবে প্রথমটার e^{π} গুণ। একই যুক্তিতে তৃতীয়টা হবে প্রথমটার $e^{2\pi}$ গুণ, আর চতুর্থটা হবে $e^{3\pi}$ গুণ। অতএব উপরতলার integral-টা নীচের তলার $1 + e^{\pi} + e^{2\pi} + e^{3\pi}$ গুণ। অতএব

$$L = 1 + e^{\pi} + e^{2\pi} + e^{3\pi} = \frac{e^{4\pi}-1}{e^{\pi}-1}.$$

সঠিক option-এ পেন্সিল চালানোর দায়িত্বটা তোমার উপরেই ছেড়ে দিলাম। ■

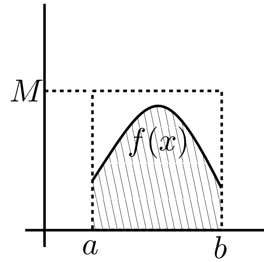


Fig 70

8.2 কত ছোটো বা কত বড়ো আন্দাজ করা

অনেক সময়েই এমন $\int_a^b f(x)\,dx$ নিয়ে কাজ করতে হয়, যেটাকে বার করা শক্ত। তখন এটুকু অন্ততঃ আন্দাজ করতে পারলে সুবিধা হয় যে integral-টা সবচেয়ে কম কত হতে পারে, বা সবচেয়ে বেশী কত হতে পারে। ঠিক যেমন কোনো লোককে দেখেই তুমি হয়তো তার বয়সটা নির্ভুল বলতে পারবে না, কিন্তু একটা আন্দাজ করতে পারবে--চল্লিশের কম হতেই পারে না, কিংবা বড়োজোর পঞ্চান্ন হবে। ছবি দিয়ে চিন্তা করলে অনেক সময়ে এরকম আন্দাজ করা সহজ হয়। কায়দাটা হল integral-টাকে একটা শেড করা অঞ্চলের signed area বলে ভাবা, এবং সেই অঞ্চলটাকে কোনো সহজতর অঞ্চলের মধ্যে আছে বলে কল্পনা করা। একটা উদাহরণ দেখাই, বুঝতে সুবিধা হবে।

Example 41: Fig 70-র $f(x)$-টাকে দ্যাখো। $[a,b]$-র উপরে সর্বদাই $0 \leq f(x) \leq M$ হচ্ছে। তাই যদি তুমি পুরো শেড করা অঞ্চলের area-টা দ্যাখো, তবে সেটা M উচ্চতার rectangle-টার মধ্যে এঁটে যেতে বাধ্য। সুতরাং পাচ্ছি--

$$0 \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M \cdot (b-a).$$

খেয়াল রেখো, এখানে $a < b$ নিয়ে কাজ করছি। ■

এই ছোট্টো জিনিসটা অংকের দুনিয়ায় অনেক জায়গায় অপ্রত্যাশিতভাবে কাজে আসে। কয়েকটা এরকম অংক দেখাই।

Example 42: The integral

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos x}$$

is equal to

(A) -1

(B) -2

(C) 2

(D) 4

(JEE(main)2017)

SOLUTION:এখানে integral-টা অনায়াসেই বার করে দেওয়া যায়, এইভাবে--

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos x} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\,dx\end{aligned}$$

এটা পেয়েছি integrand-টার উপর নীচ দুদিকেই $1-\cos x$ দিয়ে গুণ করে।

$$\begin{aligned}&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \operatorname{cosec}^2 x - \cot x \operatorname{cosec} x\, dx.\\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \operatorname{cosec}^2 x\, dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cot x \operatorname{cosec} x\, dx.\\ &= \quad -\cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} + \quad \operatorname{cosec} x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}.\end{aligned}$$

খুব কঠিন কিছু নয়, কিন্তু বেশ খানিকটা খুঁটিনাটি হিসেব করতে হবে। এবার দ্যাখো integration-টা না করেই কীভাবে উত্তরটা বলে দেওয়া যায়। লক্ষ করো integrand-টা সর্বদাই ≥ 0, এবং integral-এর নীচের প্রান্তের সংখ্যাটা (মানে $\frac{\pi}{4}$) উপরের প্রান্তের সংখ্যাটার চেয়ে ছোটো। অতএব integral-টা ≥ 0 হতে বাধ্য। সুতরাং প্রথম দুটো option গোড়াতেই বাদ হয়ে গেল। এবার চিন্তা করে দ্যাখো পুরো area-টা একটা rectangle-এর মধ্যে এঁটে যাবে, যার উচ্চতা হল 2, আর চওড়া $\frac{\pi}{2}$. সুতরাং rectangle-টার area-টা হল π, তাই কোনোভাবেই integral-টা তার চেয়ে বড় হতে পারে না। অতএব উত্তর হবে 2. ■

Exercise 29: Let $f : \mathbb{R} \to (0,1)$ be a continuous function. Then which of the following function(s) has (have) the value zero at some point in the interval $(0,1)$?

(A) $x^9 - f(x)$

(B) $x - \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} f(t)\cos t\, dt$

(C) $e^x - \int_0^x f(t)\sin t\, dt$

(D) $f(x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\, dt$

(JEE(adv)2017.I40)

HINT: প্রথম option-টা দেখা যাক । Function-টা হল $x^9 - f(x)$ যেটা $x = 0$-তে < 0 আর $x = 1$-এ > 0. যেহেতু function-টা continuous, তাই $(0,1)$-এর মধ্যে কোথাও না কোথাও x-axis ফুঁড়ে উঠতে বাধ্য। সুতরাং (A) একটা উত্তর হচ্ছে।

এবার (B)-এর দিকে চোখ ফেরাও। যদি $x = 0$ বসাও, তবে < 0 হচ্ছে (কেন, চিন্তা করে বুঝে নাও)। যদি $x = 1$ বসাও, পাবে $1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}-1} f(t)\cos t\, dt$. এবার সেই কৌশলটা কাজে লাগবে, $f(t)$ আর $\cos t$ দুজনেই $(0,1)$-এর মধ্যে, তাই ওদের গুণফল, মানে $f(t)\cos t$-ও থাকবে $(0,1)$-এর মধ্যে। সুতরাং $\int_0^{\frac{\pi}{2}-1} f(t)\cos t\, dt$-কে একটা অঞ্চলের area বলে ভাবলে সেই অঞ্চলটাকে একটা rectangle-এর মধ্যে ঢুকিয়ে দিতে পারবে, যার চওড়া $\frac{\pi}{2} - 1$ আর উচ্চতা 1. সুতরাং তার area হল $\frac{\pi}{2} - 1$, যেটা < 1. তাই $1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}-1} f(t)\cos t\, dt < 0$ হচ্ছে। সুতরাং (A)-র মত একই যুক্তিতে (B)-ও একটা উত্তর হচ্ছে।

এবার (C)-এর পালা। লক্ষ করো e^x সর্বদাই ≥ 1 (মনে রেখো আমরা $(0,1)$-এর উপরে কাজ করছি)। ওদিকে সেই rectangle-এর কৌশলটা দিয়ে বলতে পারবে যে $\int_0^x f(t)\sin t\, dt$ থাকবে 1-এর নীচে। তাই (C)-এর function-টা সর্বদাই > 0 হয়ে থাকবে। সুতরাং (C)-টা উত্তর হবে না।

এবার দেখাও যে (D)-এর function-টাও সর্বদা > 0 হবে। ■

DAY 9
Limit of sum

9.1 মোল্লা নাসিরুদ্দীন ও integration

হয় না কি হয়, সত্যি মিথ্যা চল্ না দেখি গিয়ে!

--সুকুমার রায়

মোল্লা নাসিরুদ্দীনের গল্পে একটা রাজার কথা পড়েছিলাম। তাঁর অভ্যাস ছিল লোকজনকে বিদঘুটেরকম কঠিন সব প্রশ্ন করে উত্যক্ত করা। যেমন, হয়তো কাউকে জিজ্ঞাসা করলেন--বলো তো, ওই সামনের মাঠটায় মোট কতগুলো ঘাস আছে? বা, সাগরের তীরে কতগুলো বালির দানা আছে? লোকে এসব প্রশ্ন শুনে কী বলবে ভেবে না পেয়ে নাস্তানাবুদ হয়ে যেত। একদিন রাজামশায় নাসিরুদ্দীনকে হাতের কাছে পেয়ে মুরগী করার জন্য বলেছেন-- বলো তো, আকাশে কটা তারা আছে? নাসিরুদ্দীন ঘাবড়াবার পাত্রই নয়, তৎক্ষণাৎ জবাব দিয়েছে-- আজ্ঞে জাঁহাপনা, আমার গাধার লেজে যে কয়টা চুল আছে, ঠিক ততগুলোই তারা আছে আকাশে। রাজামশাই এই উত্তর শুনে চটেই অস্থির! নাসিরুদ্দীন একগাল হেসে বলল-- বিশ্বাস না হয়, গুণেই দেখুন না। প্রথমে এক এক করে গাধাটার লেজে কটা চুল আছে গুণুন, তারপর একটা একটা করে আকাশের তারাগুলো গুণে ফেলুন। দেখবেন একদম এক উত্তর পাবেন, একচুল এদিক ওদিক হবে না।

তা, এরকম ঠকানো উত্তর সব ক্ষেত্রেই দেওয়া যায়। যেখানেই উত্তরটা মিলিয়ে দেখার পথ নেই, সেখানেই বুক ঠুকে কোনো একটা আজগুবি উত্তর দিয়ে দিলেই হল! ভুল আর প্রমাণ করবে কী করে? আমাদের area বার করার ব্যাপারটাই ধরো না। এই যে তোমাকে বলেছিলাম Fig 71-এর শেড করা অঞ্চলটার area হল

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3},$$

সেটা ঠিক বলেছিলাম, নাকি নাসিরুদ্দীনের মত ফাঁকি দিয়েছিলাম, বুঝবে কী করে? এ কথা ঠিক যে, সহজ সহজ shape-দের বেলায় integration ব্যবহার করে ঠিক উত্তরই এসেছিল, কিন্তু Fig 71-এর বেলাতেও যে উত্তরটা ঠিক, সেটা কি কোনোভাবে মিলিয়ে নেওয়া যায়? উত্তর হল--হ্যাঁ যায়, যদিও তাতে বেশ খানিকটা ঝকমারি আছে। এবার সেটাই শিখব।

9.2 হাতেনাতে পরীক্ষা

Example 43: আবার Fig 71-এর শেড করা অঞ্চলটার area বার করো, কিন্তু integration না লাগিয়ে।

SOLUTION: Fig 71-এর area-টার নাম দেওয়া যাক A. আমরা rectangle-এর area বার করতে জানি। তাই বিভিন্ন rectangle জুড়ে জুড়ে এই area-টার কাছাকাছি যাওয়ার চেষ্টা করব। যদি খালি একটা rectangle নিয়ে কাজ করার চেষ্টা করি, তবে ব্যাপারটা Fig 72-এর মত হতে পারে। অবশ্য rectangle-টার area এখানে A-র চেয়ে অনেকটাই বড় (উপরে একটা বাড়তি ত্রিভুজের[4] মত অংশ ঢুকে গেছে)।

[4]নিখুঁত ত্রিভুজ নয় অবশ্য, কারণ গ্রাফটা তো সোজা নয়, বাঁকা।

Fig 71

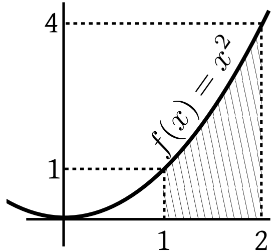
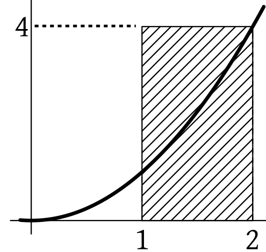


Fig 72



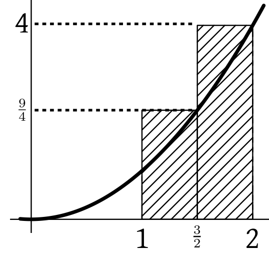


Fig 73

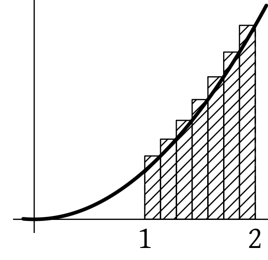


Fig 74

যদি Fig 73-এর মত করে দুটো rectangle ব্যবহার করি, তবে A-র আরো কিছুটা কাছে যাওয়া যাবে। এখানে দুটো ত্রিভুজের মত অংশ বাড়তি ঢুকে গেল, কিন্তু ওদের মোট area-টা আগেরবারের ত্রিভুজটার area-র চেয়ে কম।
আন্দাজ করতে পারছ যে, যত বেশী rectangle ব্যবহার করব, ততই A-র বেশী কাছে যেতে পারব। যেমন Fig 74-এ 7-টা ভাগ করেছি, সেখানে ভুলের পরিমাণ অনেকটাই কম। যদি n-টা rectangle লাগাই, তবে দেখা যাচ্ছে যে, $n \to \infty$ হলে ভুলের পরিমাণ$\to 0$ হবে। মানে, যদি n-খানা rectangle-এর মোট area হয় A_n, তবে $n \to \infty$ হলে $A_n \to A$ হবে। যেহেতু A_n-গুলো সকলেই rectangle জুড়ে জুড়ে তৈরী, তাই A_n বার করে ফেলতে পারব। তারপর একটা limit নিলেই A পেয়ে যাব। চেষ্টা করে দেখা যাক। এখানে A_n-এর মধ্যে n-খানা rectangle আছে, প্রত্যেকেরই চওড়া হচ্ছে $\frac{1}{n}$. (ছবি দিয়ে বুঝতে চাইলে Fig 73-এর সঙ্গে মিলিয়ে নাও, সেখানে $n = 2$)। প্রথমটার উচ্চতা হচ্ছে $f\left(1+\frac{1}{n}\right)$, দ্বিতীয়টার $f\left(1+\frac{2}{n}\right)$, তৃতীয়টার $f\left(1+\frac{3}{n}\right)$, এইভাবে চলতে চলতে শেষটার উচ্চতা হবে $f\left(1+\frac{n}{n}\right) = f(2)$. সুতরাং ওদের মোট area হবে

$$A_n = \tfrac{1}{n} \times \left(f\left(1+\tfrac{1}{n}\right) + f\left(1+\tfrac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1+\tfrac{n}{n}\right)\right).$$

এটাকে আমরা summation ব্যবহার করে লিখতে পারি

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

মনে রেখো যে $f(x) = x^2$. তাই--

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2 \\
&\qquad \text{এখন } \left(1+\tfrac{k}{n}\right)^2 = 1 + \tfrac{k^2}{n^2} + \tfrac{2k}{n}. \text{ অতএব--} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[1+\frac{k^2}{n^2}+\frac{2k}{n}\right] \\
&= 1 + \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k \\
&\qquad \text{আমরা জানি যে } \textstyle\sum_1^n k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ আর} \\
&\qquad \text{আর } \textstyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \text{ সুতরাং--} \\
&= 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} + \frac{2n(n+1)}{2n^2} \\
&= 1 + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} + \frac{n+1}{n} \\
&\to 1 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

এই limit-টা কী করে করলাম, বুঝলে তো? না বুঝে থাকলে এইভাবে এগোও--

> শেষের $\frac{n+1}{n}$-টাকে $1+\frac{1}{n}$ আকারে লিখলেই বুঝবে যে ওর limit হচ্ছে 1, কারণ $\frac{1}{n} \to 0$. তার আগে যে $\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$-টা আছে সেটার দুদিককেই n^2 দিয়ে ভাগ করে এইভাবে লেখো--
>
> $$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}.$$
>
> এবার $\frac{1}{n} \to 0$ লাগালেই limit পেয়ে যাবে $\frac{1\times 2}{6} = \frac{1}{3}$.

আগেই দেখেছি যে, A_n-এর limit-টাই হল A. তার মানে $A = \frac{7}{3}$ পেয়ে গেলাম, ঠিক যে উত্তরটা integration করেও পেয়েছিলাম! ■

আমরা যেভাবে rectangle-গুলো নিয়েছিলাম, সেভাবে না নিয়ে অন্যভাবেও নেওয়া যেত, এবং উত্তর তাতেও একই আসত। সেইটা নিয়ে একটু গবেষণা করতে চাইলে নীচের অংকটা করো।

Exercise 30: আবার সেই একই area বার করব, কিন্তু এবার rectangle-গুলোকে নেব গ্রাফের নীচের দিক থেকে। একটা rectangle নিলে দেখতে হবে Fig 75-এর মত, দুটো নিলে Fig 76-এর মত, আর 6-টা rectangle নিলে Fig 77-এর মত। যদি এরকম n-খানা rectangle-এর মোট area-কে B_n নাম দিই, তবে B_n-এর একটা ফর্মুলা বার করো। তারপর limit নিয়ে দ্যাখো $n \to \infty$ হলে $B_n \to \frac{7}{3}$ হচ্ছে কিনা।
■

বুঝতেই পারছ এভাবে একটু জটিল $f(x)$-এর বেলায় এগোনো খুবই মুশকিল। যদি $f(x) = x^3$ নিতাম, তবে $\sum_1^n k^3$-এর ফর্মুলা লাগাতে হত, আর যদি $f(x) = x^9$ নিতাম, তবে লাগত $\sum_1^n k^9$-এর ফর্মুলা। সেরকম ফর্মুলা একটা হয় নিশ্চয়ই, কিন্তু বার করা মোটেই সহজ হত না। তবে আরেকটা $f(x)$ বলতে পারি, যেটার বেলাতেও হিসেবটা সোজাই। সেটা নিজের হাতে করে দেখতে চাইলে নীচের অংকটা করো।

Exercise 31: কোনো integration ছাড়াই দেখাও যে $\int_0^1 e^x dx = e - 1$. ■

যাই হোক, কাজটা সহজ হোক আর নাই হোক, কাজটা করা সব সময়েই সম্ভব। ব্যাপারটা এইরকম--

- তোমাকে একটা function দেওয়া থাকবে (যেটাকে আমরা এই বইতে piecewise continuous এবং bounded ধরে নেব[5])। Function-টা $[a,b]$-এর উপরে defined.
- আমরা $[a,b]$-কে সমান n-খানা ভাগে ভাগ করব--

[5]মানে গ্রাফটা বড়োজোর কয়েকটা continuous টুকরো জুড়ে তৈরী, এবং কোথাও ∞ বা $-\infty$-র দিকে হাত বাড়ায় না।

Fig 75

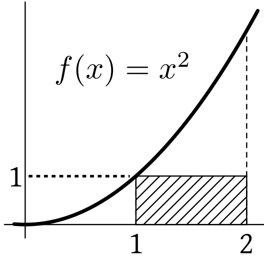


Fig 76

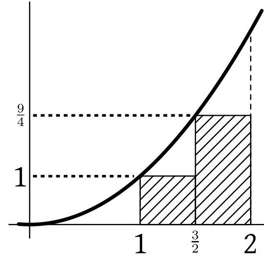
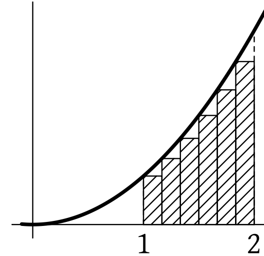
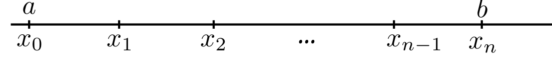


Fig 77





যেখানে $x_k = a + k \times \frac{b-a}{n},\ k = 0, 1, ..., n.$

- এবার প্রত্যেকটা ভাগের উপরে একটা করে rectangle আঁকব। আমরা k নম্বর rectangle-টার উচ্চতা নেব $f(x_k)$, যেখানে $k = 1, 2, ..., n.$ তার মানে rectangle-গুলোর উপরের[6] ডানদিকের প্রান্ত থাকবে গ্রাফটার গায়।

- তাহলে k নম্বর rectangle-টার signed area হবে

$$\frac{b-a}{n} \times f(x_k) = \frac{b-a}{n} \times f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right).$$

এটাকে signed area বললাম, কারণ $f(x_k) < 0$ হলে এটাও < 0 হবে।

- সবগুলো rectangle-এর মোট signed area হবে

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k \times \tfrac{b-a}{n}).$$

তবে $n \to \infty$ হলে পাব মোট signed area-টা, যেটাকে integration দিয়ে প্রকাশ করলে হয় $\int_a^b f(x)\, dx$. অতএব পাচ্ছি এই সূত্রটা--

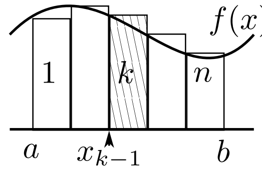
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k \times \tfrac{b-a}{n}) = \int_a^b f(x)dx.$$

যদি বাঁদিকের limit-টা সরাসরি বার করতে কষ্ট হয় (প্রায় সবসময়েই হবে, দেখতেই যা বিচ্ছিরি!), তবে তুমি চট্‌ করে ডানদিকের definite integral-টা করে ফেললেই উত্তর পেয়ে যাবে।
হঠাৎ মনে হতে পারে, অমন বিদ্‌ঘুটে একটা limit বার করার আদৌ দরকার পড়বে কেন? আসলে ক্যালকুলাসের অন্যতম একধরণের প্রয়োগ লুকিয়ে আছে ওরই মধ্যে। বস্তুতঃ এই যে আমরা $\int_a^b f(x)dx$ চিহ্নটা ব্যবহার করছি, সেটার সৃষ্টিও এই limit-টার কথা ভেবেই। কিন্তু সেই প্রসঙ্গে যাবার আগে এই বিদ্‌ঘুটে limit-টার আরো কয়েকটা রূপের কথা বলি। আমরা যদি rectangle-গুলোর ছাদের বাঁদিকের প্রান্তগুলোকে গ্রাফের গায় লাগাতাম (Fig 78), তবে k নম্বর rectangle-টার উচ্চতা হত $f(x_{k-1}) = f\left(a + (k-1) \times \frac{b-a}{n}\right)$. সেক্ষেত্রেও অবশ্যই limit-টা একই হত, মানে

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + (k-1) \times \tfrac{b-a}{n}) = \int_a^b f(x)dx.$$

[6]অবশ্য যদি $f(x_k) < 0$ হয়, তবে সেটা নীচের ডানদিকের প্রান্ত হয়ে যাবে।

Fig 78



কয়েকটা অংক করে এই limit দুটো একটু সড়গড় হয়ে নেওয়া যাক।

Example 44: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n} =?$

SOLUTION: একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে এটা আসলে প্রথম limit-টা। এখানে $f(x)=\sin x$ আর $a=0$ আর $b=1$. তাই limit-টা হল $\int_0^1 \sin x\,dx = \left. -\cos x\right|_0^1 = -\cos 1+\cos 0 = 1-\cos 1.$ ■

Exercise 32: এই limit-গুলো বার করো।

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(1+\frac{2k}{n}\right)$
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(2+\frac{2(k-1)}{n}\right)^2$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{3k}{n}\right)^2-1\right]$

■

অনেক limit আছে যেগুলো সম্পূর্ণ এই চেহারার নয়, কিন্তু একটু দলাইমলাই করে এই চেহারায় এনে ফেলা যায়। সেরকম একটা উদাহরণ দেখা যাক।

Example 45: $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{n+1} \exp\left(2+\frac{k-1}{n}\right) =?$

SOLUTION: এর কাছাকাছি যে limit-টা আমাদের পরিচিত চেহারার, সেটা হল

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \exp\left(2+\tfrac{k-1}{n}\right)}_{A_n}.$$

এটা আমাদের দ্বিতীয় চেহারাটায় আছে, যেখানে $f(x)=e^x,\ a=2$ আর $b=3$. সুতরাং limit-টা হবে

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \int_2^3 e^x\,dx = \left. e^x\right|_2^3 = e^3-e^2.$$

অবশ্য এই limit-টা আমাদের বার করতে বলে নি। আমাদেরকে যেটার limit বার করতে বলেছিল, সেটাকে এবার আমরা

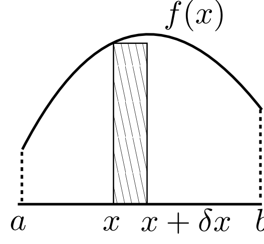


Fig 79

A_n দিয়ে লেখার চেষ্টা করি। আমাদের দিয়েছিল--

$$\frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{n+1}\exp\left(2+\tfrac{k-1}{n}\right)$$

প্রথমে বাইরের $\frac{2}{n-1}$-এর জায়গায় $\frac{1}{n}$ আনা যাক।

$$= \frac{2n}{n-1}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n+1}\exp\left(2+\tfrac{k-1}{n}\right)$$

এবার $\sum$-এর উপরের $n+1$-টাকে n করতে হবে।

মানে, $n+1$ নম্বর term-টাকে আলাদা করে $\sum$-এর বাইরে এনে লিখতে হবে।

$$= \frac{2n}{n-1}\times\left[\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\exp\left(2+\tfrac{k-1}{n}\right)}_{A_n}+\frac{e^3}{n}\right]$$

$$= \frac{2n}{n-1}\times\left(A_n+\frac{e^3}{n}\right)$$

যেহেতু $\frac{2n}{n-1}\to 2$ আর $\frac{e^3}{n}\to 0$ এবং $A_n\to e^3-e^2$, তাই আমাদের উত্তর হবে

$$2(e^3-e^2).$$

■

এরকম কয়েকটা অংক এবার তোমার জন্য।

Exercise 33:

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(3+\frac{4k}{n}\right)=?$
2. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\left(1-\frac{k}{n}\right)^2}=?$

■

এবার বলি এইরকমের limit-দের সঙ্গে $\int_a^b f(x)\,dx$ চিহ্নটার যোগ কোথায়। ধরো $f(x)$-এর গ্রাফের নীচের জায়গাটা শেড করেছ, এবং সেটাকে সমান চওড়া n-খানা ভাগে ভাগও করেছ। এককেটা চিলতি যতটা চওড়া সেটাকে δx নাম দিলাম (মানে

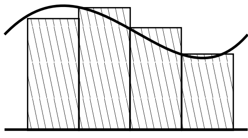


Fig 80

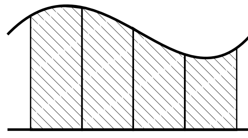


Fig 81

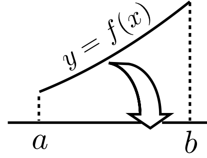


Fig 82

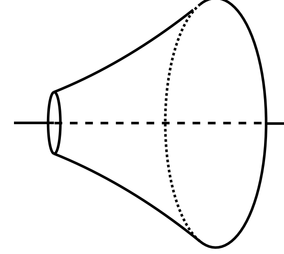


Fig 83

এতক্ষণ যেটাকে $\frac{b-a}{n}$ বলছিলাম)। সাবধান, δx মানে কিন্তু $\delta \times x$ নয়, δx মানে "এক চিলতি x"। এবার প্রতিটা চিলতির উপরে একটা করে rectangle খাড়া করব, যার ছাদের বাঁদিকের প্রান্তটা গ্রাফের গায় ঠেকে থাকবে, মানে $[x, x+\delta x]$-এর উপরে দাঁড়ানো rectangle-টার উচ্চতা হবে $f(x)$. বোঝার জন্য Fig 79 দেখে নাও। তার মানে sum-টার প্রতিটা term-ই $f(x)\delta x$ জাতীয়। সুতরাং চট্ করে লিখতে হলে $\sum_a^b f(x)\delta x$ লেখা যায়। এর limit-টা লেখার জন্য আমরা খালি $\sum$-এর জায়গায় $\int$ লিখব (আসলে $\sum$ হল গ্রীক 'S' অক্ষর, আর $\int$ চিহ্নটাও ওই 'S'-কেই খানিকটা লম্বা করে বানানো)। আর δx-টাকে dx বানিয়ে দেব। এইভাবে লেখার কায়দাটা Leibniz (লাইব্‌নিৎস্) নামের একজন গণিতজ্ঞের তৈরী। এই চিহ্নটা দিয়ে ভাবলে একটা "গোঁজা" কায়দায় signed area বার করা ছাড়াও অনেক জিনিস করা যায়। এই "গোঁজা" পদ্ধতির ভূরি ভূরি উদাহরণ রয়েছে physics-এ। সেই আলোচনা করব কালকে। Integral calculus-এর কিছু গুরুত্বপূর্ণ প্রয়োগের খোঁজও পাবে সেই প্রসঙ্গে।

DAY 10
একটি "গোঁজা" ও তার বিভিন্ন প্রয়োগ

Fig 80-এর মত ছবি আমরা ইতিমধ্যে অনেকবারই দেখেছি। যদি rectangle-গুলোর area সব যোগ করি, তবে শেড করা অঞ্চলটার area-র কাছাকাছি কিছু একটা পাব। এবার Fig 81-র দিকে তাকাও। এখানেও সরু সরু ফালি করেছি, কিন্তু কোনো rectangle আঁকি নি। এবার যদি সবগুলো শেড করা ফালির area যোগ করি, তবে একেবারে নিখুঁতভাবে মোট শেড করা area-টা পেয়ে যাব, যেটা $\int_a^b f(x)\, dx$. এখান থেকেই এই "গোঁজাটা"-র জন্ম--

> যেকোনো একটা x নাও, সেখান থেকে শুরু করে খুব সরু একটা ফালি কাটো, যার চওড়া dx. যেহেতু ফালিটা খুব সরু নিয়েছ, তাই ওটুকুর উপরে ফালিটার আকার সুবিধা মত "সামান্য" বদলে নিলে "অসুবিধা নেই"। এবার যা বার করতে হবে, সেটা ওই পরিবর্তিত ফালিটার জন্য বার করো, এবং উত্তরটাকে "কিছু একটা $\times$ dx" আকারে লেখো। এবার ধাঁ করে এর আগে এটা definite integral বসিয়ে দিলেই ম্যাজিক করে একেবারে নির্ভুল উত্তর পেয়ে যাবে, ওই "সামান্য" বদলে নেওয়ার যাবতীয় প্রভাব কীভাবে যেন বেমালুম হাপিশ হয়ে যাবে!

তবে কিনা, অংক ব্যাপারটা লজিকের উপর দাঁড়িয়ে আছে, ম্যাজিকের উপরে নয়। তাই এই ম্যাজিক কৌশলটা পুরোই গোঁজা। এর সাফল্য নির্ভর করে ওই "সামান্য" বদলানোটা কী করে করছি তার উপর। মনে রেখো ফালিগুলো যতই সরু করবে, ফালির সংখ্যাও ততই বাড়বে, অতএব সামান্য পরিবর্তনগুলো জমে জমে অসামান্যরূপ নিয়ে বসতে পারে। কিন্তু বহুক্ষেত্রেই এই গোঁজা কায়দায় সঠিক উত্তর আসে। এরকম কিছু উদাহরণ এবার দেখব আমরা। সবশেষে একটা উদাহরণ দেখব যেখানে গোঁজাটা লাগালে ভুল উত্তর বেরোয়।

10.1 Volume বার করা

ধরো একটা curve আছে, Fig 82-এর মত। এটাকে আমরা x-axis-কে কেন্দ্র করে ঘোরাব। ফলে একটা মাইকের মত জিনিস তৈরী হবে (Fig 83)। আমরা এর volume বার করব, মানে যদি মাইকের ভিতরটা জলে ভর্তি করতে চাও, তবে কতটা জল লাগবে, সেটা জানতে চাইছি। তার জন্য "গোঁজা" কায়দাটা এইরকম--

> প্রথমে x-axis-এর উপরে একটা কোনো বিন্দু নাও। সেখান থেকে শুরু করে x-axis-এর সঙ্গে আড়াআড়িভাবে একটা পাতলা ফালি কাটো, যার চওড়াটা ধরো dx. ছবিতে এঁকে দেখিয়েছি Fig 84-এ। এটাকে "সামান্য"

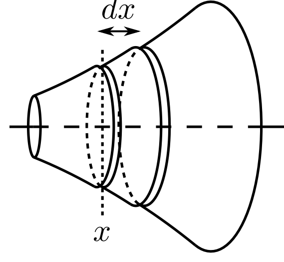


Fig 84

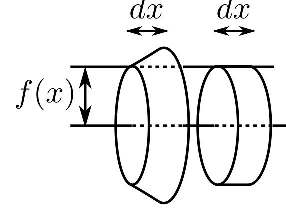


Fig 85

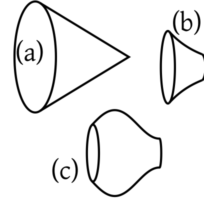
বদলালেই চমৎকার একটা cylinder বলা যায়, যার radius হল $f(x)$. বোঝার জন্য Fig 85 দেখে নাও। আমরা কোনো cylinder-এর volume বার করার ফর্মুলা জানি (Fig 86)। সুতরাং এই পরিবর্তিত পাতলা ফালিটার volume হবে $\pi f(x)^2\,dx$. পুরো মাইকটার volume-টাকেই আমরা এরকম অনেকগুলো পাতলা চাকতি জুড়ে জুড়ে তৈরী ভাবতে পারি। চাকতিগুলো যতই পাতলা হবে, ততই ওদের মোট volume মাইকটার volume-এর আরো কাছাকাছি যাবে। সেটা বুঝতে পারবে Fig 87 আর Fig 88-এর মধ্যে তুলনা করলেই)। মনে রেখো, আমরা ফালিগুলোকে "সামান্য" বদলে এই $\pi f(x)^2\,dx$-টা পেয়েছি। কিন্তু তাতে কী, যদি integrate করি, তবে তো ম্যাজিক হয়ে সব দোষ কেটে মাইকের volume-টা নির্ভুলভাবে আসবে--

$$\int_a^b \pi f(x)^2 dx.$$

আশ্চর্যের কথা এই যে, এক্ষেত্রে এই গোঁজাটা সত্যিই কাজ করে। এই গোঁজার পথেই নীচের অংকটা করো।

Exercise 34: নীচের প্রতিটা ক্ষেত্রে একটা করে $f(x)$ আর a, b দেওয়া আছে। তোমাকে বলতে হবে $f(x)$-এর গ্রাফটার $x = a$ থেকে $x = b$ পর্যন্ত অংশটাকে x-axis-কে কেন্দ্র করে একপাক ঘোরালে যে জিনিসটা পাওয়া যায়, তার volume কত হবে, অর্থাৎ কিনা প্রতিক্ষেত্রে $\int_a^b \pi f(x)^2\,dx$ বার করতে হবে। পাশে জিনিস তিনটের ছবিও দেওয়া আছে। Volume বার করার সঙ্গে সঙ্গে এটাও বলতে হবে যে, কোন্ ছবিটা কোন্টা কোন্ অংকের!

1. $f(x) = 2 + \sin x,\ a = 0,\ b = \frac{3\pi}{2}$.
2. $f(x) = 1 - \frac{x}{2},\ a = 0,\ b = 2$.
3. $f(x) = e^{-x},\ a = 0,\ b = 1$.



■

Fig 86

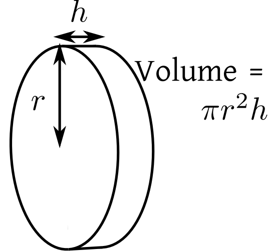


Fig 87

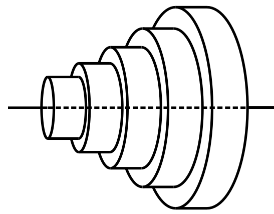
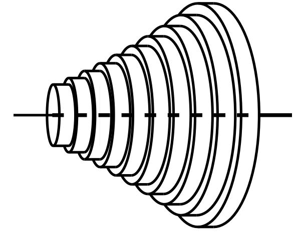


Fig 88



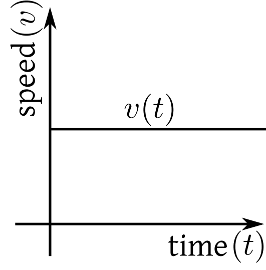


Fig 89

এবার আমরা এই গোঁজাটার আরো একটা প্রয়োগ দেখব।

10.2 দূরত্ব বার করা

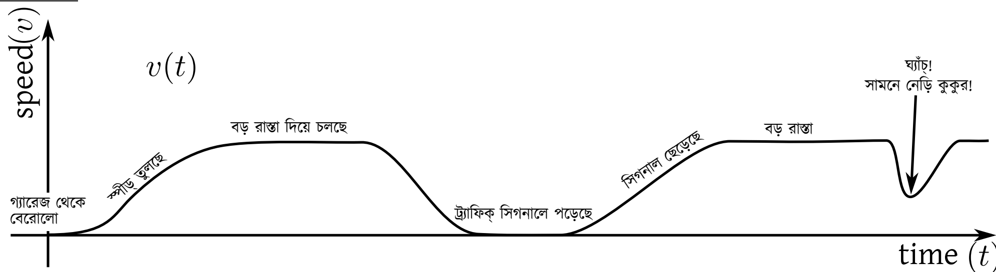
ধরো একটা গাড়ি চলছে একটা সোজা রাস্তা দিয়ে। একদম একই স্পীডে, স্পীডোমিটারের কাঁটা এক্কেবারে স্থির হয়ে আছে 60 km/h-এর দাগে। এইভাবে আধঘন্টা চললে গাড়িটা কত দূরত্ব অতিক্রম করবে? এরকম অংক ছোটোবেলায় আমরা সকলেই বিস্তর কষেছি। উত্তর হল $\frac{1}{2} \times 60 = 30$ km. এই যে গুণটা করা গেল, তার কারণ গতিবেগটা একই ছিল, বদলাচ্ছিল না। কিন্তু সাধারণতঃ কোনো গাড়ির স্পীডোমিটারের কাঁটা একই দাগে থেমে থাকে না (যদি না যন্ত্রটা বিগড়ে গিয়ে থাকে!) ফলে যদি সময়ের সঙ্গে গতিবেগের একটা গ্রাফ আঁকি, তবে সেটা Fig 89-এর মত সটান একটা horizontal লাইন না হয়ে Fig 90-র মত আঁকাবাঁকা কিছু একটা হয়। এসব ক্ষেত্রে মোটেই গুণের কায়দাটা সরাসরি ব্যবহার করা যায় না। এখানেই সেই "গোঁজা"-টা কাজে দেয়। যেকোনো একটা মুহূর্ত নাও, ধরো t. সেখান থেকে শুরু করে অল্প একটু সময় dt এগিয়ে যাও, মানে $t + dt$ পর্যন্ত। এইটুকু সময়ের মধ্যেও হয়তো গতিবেগ অল্প হলেও বদলেছে, কিন্তু আমরা ব্যাপারটাকে "সামান্য" পরিবর্তন করে নেব, এইভাবে--ধরে নেব যেন t মুহূর্তে যে গতিবেগ ছিল ($v(t)$), সেটাই $t + dt$ অব্ধি কায়েম থাকবে। এবার তাহলে ছোটোবেলার অংকের বুদ্ধিতেই দেখা যাচ্ছে যে, এইটুকু সময়ের মধ্যে গাড়িটা $v(t)dt$ পরিমাণ এগোবে। এবার আমাদের গোঁজা বলছে যে, ধাঁ করে integrate করে ফেললেই মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব পেয়ে যাব, $\int_a^b v(t)dt$. এবং কি আশ্চর্য, গোঁজাটা এখানেও কাজ করে!

লক্ষ করো যুক্তিটা একেবারেই area বার করার মতই। তাই বলতে পারি যে গতিবেগের গ্রাফের নীচের area-টাই হল অতিক্রান্ত দূরত্ব। অবশ্য কেউ কেউ আপত্তি তুলতে পারে এই বলে যে, $\int_a^b v(t)\,dt$ তো ঠিক area নয়, ওটা আসলে signed area. ওটা < 0-ও হতে পারে। কিন্তু দূরত্ব তো < 0 হয় না। ঠিক কথা! আসলে area-র বেলায় যেমন signed area-র ধারণা আছে, তেমনি দূরত্বের বেলাতেও একটা "signed দূরত্বের" ধারণা আছে, যার পোশাকী নাম **displacement** (সরণ)। ব্যাপারটা আর কিছুই নয়, সোজা রাস্তাটা বরাবর কোনো একটা দিককে positive ধরা হয়। তারপর সেই দিক বরাবর গাড়ীটা কতদূর গেছে সেটাকে positive দূরত্ব, এবং তার উল্টো দিকে গেলে negative দূরত্ব ধরা হয়। যেমন, গাড়ীটা যদি 10 km যায় positive দিকে, তারপর 3 km ফিরে আসে, তবে মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব হল $10 + 3 = 13$ km, অর্থাৎ পেট্রল পুড়বে 13 km-এর হিসেবে। কিন্তু গাড়ীটার displacement হবে $10 - 3$ km. আমরা যখন integrate করছি, তখন এই displacement-টাই বার করছি।

এবার এই কায়দায় হাতেকলমে একটা অংক করা যাক।

Example 46: একটা গাড়ি চলেছে সোজা রাস্তা দিয়ে। কোনো মুহূর্ত t-তে ওর বেগ হল $v(t) = 2t$. তাহলে $t = 1$

Fig 90



থেকে $t = 2$ পর্যন্ত গাড়ীটা কতটা দূরত্ব যাবে?

SOLUTION: লক্ষ করো এখানে $t = 1$ থেকে $t = 2$ পর্যন্ত $v(t)$ সর্বদাই ≥ 0. তাই অতিক্রান্ত দূরত্ব আর displacement একই হবে।

$$\int_1^2 2t\, dt = \cdots = 3.$$

■

এবার তোমার করার জন্য দুটো অংক।

Exercise 35: একটা ভারী জিনিস পড়ছে উপর থেকে। তার বেগ হল t মুহূর্তে $v(t) = 10t$. তবে $t = 0$ থেকে $t = 5$ পর্যন্ত তার অতিক্রান্ত দূরত্ব কত হবে? ■

Exercise 36: কোনো ভারী জিনিস যখন নীচের দিকে পড়ে, তখন পৃথিবীর আকর্ষণে তার বেগ ক্রমশঃই বাড়তে থাকে। কিন্তু যদি কেউ প্যারাশুট নিয়ে নীচে লাফিয়ে পড়ে, তখন বায়ুমণ্ডলের প্রভাবে তার বেগ ততটা বাড়ে না। এক্ষেত্রে t মুহূর্তে বেগ হয় $v(t) = a - be^{-ct}$, যেখানে $a, b, c > 0$ হল তিনটে constant (যেগুলো প্যারাশুটের গঠন ইত্যাদির উপর নির্ভর করে)। যদি প্যারাশুটটা T সময়ে ধরে পড়ে, তবে মোট কতটা দূরত্ব অব্ধি পড়বে? ■

10.3 Centre of gravity বার করা

তুমি হয়তো জানো যে একটা স্কেলকে আঙুলের উপর খালি একটা বিন্দুতে স্পর্শ করে ব্যালান্স করা যায়। তার জন্য আঙুলটাকে ঠিক কেন্দ্রে রাখতে হয় (Fig 91)। চাইলে তুমি একটা হাতুড়িকেও একইভাবে ব্যালান্স করতে পারো, তবে তার জন্য আঙুলটাকে কেন্দ্রে রাখলে চলবে না, রাখতে হবে ভারী প্রান্তটার খুব কাছে (Fig 92)। কয়েকবার এদিক ওদিক করে সেই বিন্দুটা বার করতে হয়। এই বিন্দুটাকে বলে **centre of gravity**. এবার ধরো তোমাকে Fig 93-র শেড করা অঞ্চলটার মত একটা কাগজের টুকরো দিলাম। তোমার কাজ হল এটাকে একটা বিন্দুতে ব্যালান্স করা। যারা হাতেকলমে পরীক্ষা করে দেখতে ভালোবাসো, তারা গ্রাফ কাগজে $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$-এর জন্য $f(x) = \cos x$-এর গ্রাফের নীচের অংশটা কেটে নাও। তারপর খানিকক্ষণ আন্দাজে সেটাকে আঙুলের উপর ব্যালান্স করে centre of gravity বার করার চেষ্টা করো। দেখবে কাজটা খুব সহজ নয়। অথচ integrate করে দিব্যি বার করে দেওয়া যায়। এর জন্য তিনটে integral বার করতে হয়--

$$A = \int_a^b f(x)\, dx, \qquad A_x = \int_a^b x f(x)\, dx, \qquad A_y = \frac{1}{2}\int_a^b \big(f(x)\big)^2\, dx.$$

তাহলে centre of gravity-টা হবে $\left(\frac{A_x}{A}, \frac{A_y}{A}\right)$ বিন্দুতে। এর বিশদ ব্যাখ্যায় যাচ্ছি না। কিন্তু এটাও ওই একই "গোঁজা" দিয়ে পাওয়া যায়।

Fig 91

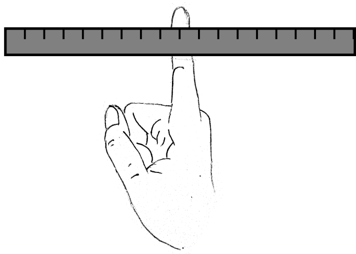


Fig 92

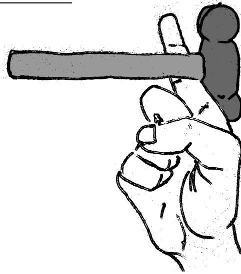
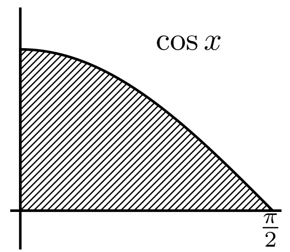


Fig 93



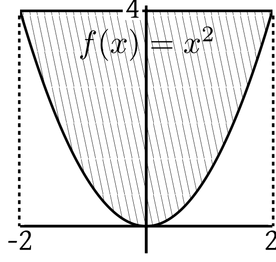


Fig 94

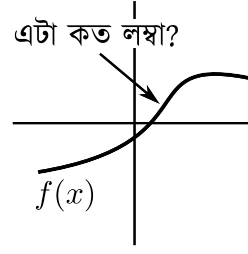


Fig 95

Exercise 37: Fig 94-এর শেড করা জায়গাটা দ্যাখো। এটাকে গ্রাফ কাগজ থেকে কেটে যদি আঙুলে একটা বিন্দুতে ব্যালান্স করতে হয়, তবে আঙুলটা ঠিক কোথায় রাখবে বার করো। ■

10.4 গ্রাফের দৈর্ঘ্য বার করা

এখানে আমরা বার করব $y = f(x)$-এর গ্রাফটার দৈর্ঘ্য (Fig 95)। ধরো গ্রাফটা একটা লোহার তার বাঁকিয়ে তৈরী। আমরা জানতে চাই এই লোহার তারটা কতটা লম্বা। এটা বার করার জন্য আমরা দুটো কায়দা দেব, দুটোই সেই গোঁজার উপরে দাঁড়িয়ে আছে। প্রথম কায়দাটা এইরকম--

> গোড়াতে যথারীতি x থেকে $x + dx$ অংশটা নাও। এইটুকুর উপরে আমরা গ্রাফের অংশটুকুকে "সামান্য" বদলে একটা সরলরেখা বলেই ভাবতে পারি (Fig 96)। এই অংশটার উপরে y যতটা বেড়েছে, সেটাকে যদি dy নাম দিই, তবে Pythagoras লাগালে এই অংশটুকুর দৈর্ঘ্য পাচ্ছি $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. সুতরাং integrate করলেই পুরো গ্রাফটার দৈর্ঘ্য নিশ্চয়ই হবে
>
> $$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

এই কায়দাতে যে "সামান্য" পরিবর্তনটা ব্যবহার করলাম, সেটা কিন্তু খানিকটা জটিল ছিল। খালি dx দিয়ে কাজ হল না, আবার একটা dy আমদানি করতে হল, সেখানে আবার dy-কে dx দিয়ে ভাগ করে $\frac{dy}{dx}$ লিখলাম, সেটাও আরেকটা গোঁজা। এইসব দেখে বীতশ্রদ্ধ হয়ে একজন ছাত্র একটা সহজতর গোঁজা বার করেছিল। সেটাই আমাদের দ্বিতীয় কায়দা--

> এখানেও x থেকে $x + dx$ পর্যন্ত অংশটা নিয়ে কাজ করব প্রথমে। খালি "সামান্য" পরিবর্তনটা করব একটু অন্যভাবে। এখানেও সরলরেখাই নেব, কিন্তু horizontal সরলরেখা (Fig 97)। তাহলে দৈর্ঘ্যটা হবে খালি dx. এটাকে integrate করলেই নিশ্চয়ই নির্ভুল দৈর্ঘ্যটা বেরিয়ে যাবে, মানে $\int_a^b dx = b - a$. ও হরি, এখানে

Fig 96

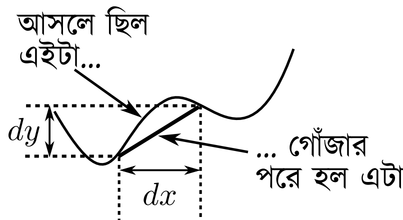
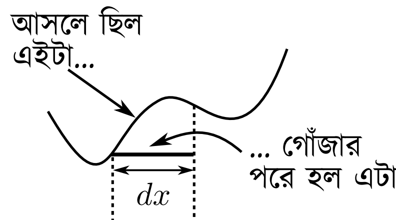


Fig 97



> তো $f(x)$-টা লাগলই না, যাই f নিই না কেন, গ্রাফের দৈর্ঘ্য তো সেই একই $b-a$ আসছে। একি শুয়োরের ছাব্বিশ ইঞ্চি নাকি?

তাহলেই দেখলে, গোঁজা লাগালেই সব সময়ে কাজ হয় না (নইলে আর গোঁজা বলছি কেন)! তবে প্রথম গোঁজা কায়দাটা (মানে dy-ওয়ালা কায়দাটা) এক্ষেত্রে সত্যিই কাজ করে। কেন করে, সে আলোচনার জন্য আরো ভারী ভারী অংক লাগবে। সেই প্রসঙ্গে না গিয়ে সেই কায়দায় কয়েকটা অংক করা যাক। এতে তোমাকে $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$-কে integrate করতে হবে। সেটা করা অনেকক্ষেত্রেই বেশ কঠিন। নীচের অংকে আমরা এমন কয়েকটা $f(x)$ দিয়েছি, যাতে integral-টা করা খুব শক্ত না হয়।

Exercise 38: নীচের প্রতিক্ষেত্রে একটা করে $f(x)$ আর a, b দেওয়া আছে। তোমার কাজ হল $x=a$ থেকে $x=b$ পর্যন্ত $f(x)$-এর গ্রাফের দৈর্ঘ্য বার করা।

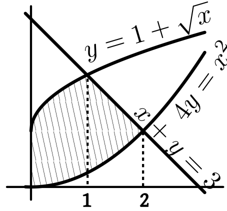
SOLUTION:

1. $f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2},\ a=2,\ b=3.$
2. $f(x) = 2x+1,\ a=0,\ b=2.$
3. $f(x) = 2\sqrt{e^x-1} - 2\tan^{-1}\sqrt{e^x-1},\ a=1,\ b=2.$

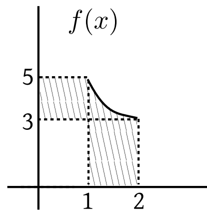
■

Answers

1. (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$. (b) $\int_1^3 e^{-x}\,dx$. (c) $\int_{-1}^2 e^{-x^2/2}\,dx$. **2.** (*i*) $\frac{1}{2}(e^4-1)$. (*ii*) $4+\sin 2$. (*iii*) $\frac{1}{4}$. (*iv*) 1.
3. $\int_0^b h\left(1-\frac{x}{b}\right)\,dx = \frac{bh}{2}$. **4.** $C=\left(\frac{3}{4},0\right)$. $\int_0^2 x^2+1\,dx - \frac{1}{2}\times\frac{5}{4}\times 5 = \frac{37}{24}$. **5.** (B). **6.**



$\int_0^1(1+\sqrt{x})\,dx + \int_1^2(3-x)\,dx - \int_0^2\frac{x^2}{4}\,dx = \frac{5}{3}+\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{2}$. সুতরাং উত্তর (A). **7.** (B).
8. $\int_{-1/2}^1 \frac{y+1}{4}-\frac{y^2}{2}\,dy = \frac{9}{32}$. সুতরাং উত্তর হল (D). **9.** $\int_1^2 x^2\,dx + 8\int_2^8\frac{dx}{x} - 7$. উত্তর হল (A).
10. $I=\frac{1}{8}$. $\therefore 4I-1=-\frac{1}{2}$. **11.** (A). **12.** $\frac{3}{4}-\frac{3}{2}+1=\frac{1}{4}$. **13.** $\frac{1}{4}$. **14.** $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
15. (*i*) $F'(x)=\sin(\cos x)$. (*ii*) $\frac{d}{dx}F(2x) = 2F'(2x) = 2e^{-4x^2}$.
16. 0. **17.** খালি (A) আর (B) ঠিক। **18.** (*i*) $f'(x) = -\frac{x}{1+x}$. (*ii*) $f'(x) = -2e^{-2x^2}$. (*iii*) $f'(x) = \sin x e^{-\cos x + 5\cos\cos x}$.
19. (B) **20.** $4-1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{15}{4}$. **21.** (D).



2 + 3.4 - 3

= + -

22. **23.** 0. **24.** **25.** (C).

26. (*i*) $\frac{2^{51}}{51}$. (*ii*) $\frac{1}{10}$. (*iii*) $\frac{15}{64}$.
27. (*i*) $\frac{1}{2}$. (*ii*) 0. (*iii*) $\frac{b-a}{2}$.
28. (A),(C). **29.** (D)-এর integral-টা > 0 হবে, আর $f(x) > 0$ তো বলাই আছে।
30. $B_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2 \to \frac{7}{3}$. **31.** **32.** (*i*) $\frac{1}{2}(\cos 1 - \cos 3)$. (*ii*) $\frac{56}{3}$. (*iii*) 6.
33. (*i*) $\frac{1}{4}(\cos 3 - \cos 7)$. (*ii*) $\frac{3}{4}$.
34. (*i*) (*c*), $\pi\left(\frac{27\pi}{4}+4\right)$. (*ii*) (*a*), $\frac{14\pi}{3}$. (*iii*) (*b*), $\left(\frac{1}{2}-\frac{e^{-2}}{2}\right)\pi$.
35. $\int_0^5 10t\,dt = 125$. **36.** $aT + \frac{b}{c}(e^{-cT}-1)$. **37.** $\left(0, \frac{6}{5}\right)$ বিন্দুতে। **38.** (*i*) $\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$. (*ii*) $2\sqrt{5}$. (*iii*) $2(e-\sqrt{e})$.

Chapter III
Substitution

DAY 11
Substitution (part 1)

এই অধ্যায়ে আমরা integration-এর একটা গুরুত্বপূর্ণ কায়দা শিখব--তার নাম substitution substitution দিয়ে। Integration-এর অধিকাংশ সূত্রই আসে differentiation-এর সূত্রগুলোকে উল্টে। Substitution নামক সূত্রটার জন্ম differentiation-এর chain rule-কে উল্টে। Chain rule-টা কী ছিল একটু মনে করে নিই। যদি $f(x)$ এবং $u(x)$ দুজনেই differentiable হয়, এবং $f(x)$-এর পেটে $u(x)$-কে ঢোকানো যায়, তবে--

$$\frac{d}{dx}f(u(x)) = f'(u(x))u'(x).$$

এটাকে উল্টে বলা যায়--

$f'(u(x))u'(x)$-এর একটা antiderivative হল $f(u(x))$.

যদি তোমাকে কোনো একটা integration করতে দিই, তবে এই তথ্যটা কীভাবে তোমাকে সাহায্য করতে পারে? যদি তুমি ধাঁ করে চোখে দেখেই integrand-টাকে $f'(u(x))u'(x)$ আকারে লিখে ফেলতে পারো, তবে অবশ্যই একটা antiderivative পেয়ে যাচ্ছ $f(u(x))$. সুতরাং indefinite integral-টা হবে

$$\int f'(u(x))u'(x)\,dx = f(u(x)) + c,$$

যেখানে c একটা arbitrary constant.

Example 1: $\int 2x\cos(x^2+1)\,dx = ?$

SOLUTION: এটাকে দেখেই $f'(u(x))u'(x)$ আকারটা চোখে পড়ে যায়। এখানে $u(x) = x^2+1$, যার derivative হল $u'(x) = 2x$. আর $u(x)$-টা রয়েছে cos-এর পেটে, যেটা sin-এর derivative. সুতরাং $f(x) = \sin x$ নিলেই চলবে। তাই integrate করলে উত্তর হবে $f(u(x)) = \sin(x^2+1)$, অর্থাৎ--

$$\int 2x\cos(x^2+1)\,dx = \sin(x^2+1) + c,$$

যেখানে c হল একটা arbitrary constant. ■

যেকোনো integral-এর বেলাতেই integrand-টা যে এইরকম $f'(u(x))u'(x)$ আকারের হবে, এমন কিন্তু নয়। আর যদি তা হয়ও, তাও integrand-টাকে চোখে দেখেই চট্ $f(x)$ আর $u(x)$ বুঝে ফেলা সহজ নাও হতে পারে। সেরকম ক্ষেত্রে দুইভাবে এগোনো যায়। এই দুই পদ্ধতির নাম আমরা দিয়েছি--

- function-এর জায়গায় variable বসানো,
- variable-এর জায়গায় function বসানো।

এ দুটো অবশ্য আমাদেরই দেওয়া নাম, standard কিছু নয়। প্রথমটা দিয়ে শুরু করা যাক।

11.1 Function-এর জায়গায় variable বসানো

আরেকবার $f'(u(x))u'(x)$ চেহারাটার দিকে তাকানো যাক। চেহারাটার চারটে বৈশিষ্ট্য আছে--

- প্রথমতঃ, এটা দুটো জিনিসের গুণফল, $f'(u(x))$ আর $u'(x)$.
- এদের মধ্যে প্রথম জিনিসটা হল $u(x)$-এর function, মানে ওখানে x সর্বদাই $u(x)$ আকারে রয়েছে।
- এই $u(x)$-এর derivative হল দ্বিতীয় জিনিসটা।
- প্রথম জিনিসটাতে $u(x)$ যার পেটের মধ্যে আছে, সেটা নিজেই একটা derivative, যাকে আমরা f' বলেছি।

এই চারটে বৈশিষ্ট্য এক সঙ্গে চোখে পড়লে তবে $f'(u(x))u'(x)$ চেহারাটা চেনা যায়। সেটা সব সময়ে হয়ে ওঠে না। কিন্তু যদি অন্ততঃ প্রথম তিনটে বৈশিষ্ট্যও চোখে পড়ে, তবেও কাজের অনেকটা সুরাহা হয়। সেটাই আলোচনা করব এবার। একটা উদাহরণ নিয়ে শুরু করি।

Example 2: $\int \frac{(1+\log x)\log x}{x}\,dx$ বার করো।

SOLUTION: আমরা জানি যে, $\log x$-এর derivative হল $\frac{1}{x}$. তাই যদি integrand-টাকে দুটো জিনিসের গুণফল হিসেবে লিখে নিই--

$$(1+\log x)\log x \times \frac{1}{x},$$

তবে প্রথম জিনিসটা হল $\log x$-এর function, আর দ্বিতীয় জিনিসটা সেই $\log x$-এর derivative. সুতরাং প্রথম তিনটে বৈশিষ্ট্য পাওয়া গেল। এবার দেখা যাক, প্রথম জিনিসটায় $\log x$ কার পেটের মধ্যে আছে। যদি সেখানে $\log x$-এর বদলে x লিখি তবে সেই function-টা পেয়ে যাব। ধরো function-টার নাম দিলাম $h(x)$. তাহলে

$$h(x) = (1+x)x.$$

তার মানে আমাদের প্রথম জিনিসটা হল $h(\log x)$. এই $h(x)$-কে কি কোনো পরিচিত $f(x)$-এর derivative বলে চেনা যাচ্ছে? নাঃ, আমি তো অন্ততঃ পারছি না। সুতরাং চতুর্থ বৈশিষ্ট্যটা চট্‌ করে চোখে পড়ছে না। এরকম ক্ষেত্রে আমরা যেটা করি, সেটা হল একটু কষ্ট করে এমন একটা $f(x)$ পাওয়ার চেষ্টা করা, যাতে $h(x) = f'(x)$ হয়, মানে $h(x)$-এর একটা antiderivative খুঁজে বেড়াই। অর্থাৎ কিনা $\int \frac{(1+\log x)\log x}{x}\,dx$ বার করার কাজটা পরিণত হল $\int (1+x)x\,dx$ বার করাতে, যেটা অনেকটাই বেশী সহজ। দেখাই যাচ্ছে যে--

$$\int (1+x)x\,dx = \int x\,dx + \int x^2\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c,$$

যেখানে c হল arbitrary constant. তার মানে $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c$ নিলেই $f'(x) = h(x)$ হবে। অতএব চতুর্থ বৈশিষ্ট্যটাও পেয়ে গেলাম। ব্যস্‌, সুতরাং উত্তর হবে $f(\log x)$, মানে $\frac{1}{2}\big(\log x\big)^2 + \frac{1}{3}\big(\log x\big)^3 + c$. সুতরাং সব মিলিয়ে

$$\int \frac{(1+\log x)\log x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\big(\log x\big)^2 + \frac{1}{3}\big(\log x\big)^3 + c.$$

এই যে আমরা $\int \frac{(1+\log x)\log x}{x}\,dx$-কে একটা সহজতর integral, মানে $\int (1+x)x\,dx$ বার করায় পরিণত করলাম, এই ব্যাপারটা গুছিয়ে লেখার একটা প্রথাগত কায়দা আছে। কায়দাটা ঠিক অংকের কায়দা নয়, স্রেফ একটা লেখার কায়দা। আমরা প্রথমে $h(u(x))u'(x)$ চেহারাটা পেয়েছিলাম, যেখানে $u(x)$-টা ছিল $\log x$. আমরা তাই $u = \log x$ বসাব বা ইংরাজীতে বললে **substitution** করব--

> We substitute $u = \log x$.

লক্ষ করো, $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$, এবং সেটা থেকে আমরা লিখব $du = \frac{dx}{x}$. সাবধান, এটা নিতান্তই একটা লেখার কায়দা, এর কোনো গাণিতিক মানে নেই--

> Then $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$, and so, symbolically, $du = \frac{dx}{x}$.

ওই "symbolically" শব্দটুকু লিখে আমরা বোঝাচ্ছি যে, এটা খালি একটা লেখার কায়দা। এর ফলে আমাদের integral-টা এই রূপ নিচ্ছে--

> $\therefore \int \frac{(1+\log x)\log x}{x}\, dx = \int (1+u)u\, du.$

ব্যস্, আমরা সেই সহজতর integral-টায় পৌঁছে গেছি। এটাকেই একটু আগে আমরা $\int(1+x)x\,dx$ লিখেছিলাম।

> Now $\int(1+u)u\,du = \int u\,du + \int u^2\,du = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + c$, where c is an arbitrary constant.

এবার আবার u-এর বদলে $\log x$ ফিরিয়ে আনলেই হবে--

> So $\int \frac{(1+\log x)\log x}{x}\, dx = \frac{1}{2}(\log x)^2 + \frac{1}{3}(\log x)^3 + c.$

■

এই উদাহরণটার মত করে অনেক integration করে ফেলা যায়। খালি ওই $h(u(x))u'(x)$ প্যাটার্ণটা থাকলেই হল। সেটা থাকলেই $u(x)$-এর জায়গায় u বসিয়ে দিতে হবে। তার মানে $u(x)$ নামক function-এর বদলে আমরা u নামক variable বসাব। সেই কারণেই এই বইতে আমি এই পদ্ধতিটাকে "function-এর জায়গায় variable বসানো" নাম দিয়েছি।
আরেকটা উদাহরণ দেখা যাক।

Example 3: $\int(e^{\sin x} + \sin x)\cos x\,dx = ?$

SOLUTION: আমরা জানি যে $\sin x$-এর derivative হল $\cos x$. অতএব এখানে integrand-টাকে $(e^{\sin x} + \sin x) \times \cos x$ হিসেবে ভেঙে নিলে প্রথম অংশটা হল $\sin x$-এর function, আর দ্বিতীয় অংশটা হল সেই $\sin x$-এর derivative. ব্যস্, ঠিক এইরকম প্যাটার্ণটাই তো চাইছিলাম।

> Substituting $u = \sin x$, we have
>
> $$\frac{du}{dx} = \cos x,$$
>
> or, symbolically,
>
> $$du = \cos x\,dx.$$
>
> So
>
> $$\int (e^{\sin x} + \sin x)\cos x\,dx = \int (e^u + u)\,du = e^u + \frac{1}{2}u^2 + c = e^{\sin x} + \frac{1}{2}\sin^2 x + c,$$

where c is the constant of integration.

এখানে আমরা $u = \sin x$ বসিয়ে সেখান থেকে লিখেছিলাম $du = \cos x\, dx$. এটাকে অনেক সময়ে সামান্য অন্যভাবেও লেখা হয়। যেহেতু $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$, তাই সেটাকে একটু ঘুরিয়ে লেখা হয় $d(\sin x) = \cos x\, dx$. সেভাবে লিখলে অংকটার ধাপগুলো দাঁড়ায় এরকম--

$$\begin{aligned}\int (e^{\sin x} + \sin x)\cos x\, dx &= \int (e^{\sin x} + \sin x)\, d(\sin x)\\ &= \int (e^u + u)\, du \quad \left[\text{substituting } u = \sin x\right]\\ &= e^u + \frac{1}{2}u^2 + c = e^{\sin x} + \frac{1}{2}\sin^2 x + c,\end{aligned}$$

যেখানে c হল arbitrary constant. ■

এরকম অংকে সাফল্যের চাবীকাঠিটা হল ওই $h(u(x))u'(x)$ প্যাটার্ণটা খোঁজার চোখ। অনেক সময়ে আবার প্যাটার্ণটা পাওয়ার জন্য খানিকটা দলাইমলাই করে নিতে হয়, যেমন নীচের অংকটায়।

Example 4: $\int x^2 e^{x^3}\, dx = ?$

SOLUTION: এই অংকটা দেখেই যেটাতে চোখ আটকে যাওয়া উচিত, সেটা হল x^2 আর x^3. আমরা জানি যে, x^3-এর derivative হল $3x^2$. এখানে অবশ্য $3x^2$ নেই, খালি x^2 আছে। কিন্তু তাতে কী? আমরা বাইরে থেকে 3-টুকু ঢুকিয়ে নেব।

We substitute $u = x^3$. Then $\frac{du}{dx} = 3x^2$, or, symbolically, $du = 3x^2\, dx$. Hence

$$\int x^2 e^{x^3}\, dx = \frac{1}{3}\int e^u\, du = \frac{1}{3}e^u + c = \frac{1}{3}e^{x^3} + c,$$

where c is the arbitrary constant of integration.

■

এবার তোমার করার জন্য একগুচ্ছ অংক।

Exercise 1:

1. $\int e^{\cos x}\sin x\, dx$
2. $\int \tan^2 x \sec^2 x\, dx$
3. $\int x^3 e^{x^4}\, dx$
4. $\int \frac{1}{x}(\log x)^2\, dx$
5. $\int (5x+1)\sin\left(5x^2 + 2x - 4\right)\, dx$
6. $\int x\sqrt{x^2+1}\, dx$
7. $\int x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\, dx$



এই অংকগুলো করে নিশ্চয়ই খুব মজা হয়েছে? আরো মজা পেতে ইচ্ছে করছে তো? সেই জন্যেই তো নীচের অংকগুলো দিয়েছি!

Exercise 2:

1. $\int (x+2)e^{x^2+4x}\,dx$
2. $\int \frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}dx$
3. $\int \frac{1-e^x}{1+e^x}dx$
4. $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x}}\,dx$
5. $\int \frac{2x^2\,dx}{(x^3+1)^2}$
6. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx$
7. $\int \frac{\log_7 x}{x}dx$
8. $\int \frac{\sec^2 x}{(5+\tan x)^2}dx$
9. $\int \frac{\tan^{-1}2x}{1+4x^2}dx$
10. $\int \frac{\tan^3 x\sec^2 x}{(1+\tan^4 x)^3}dx$
11. $\int \frac{dx}{x(\log x)^2}$
12. $\int \frac{dx}{x\log x(1+(\log\log x)^2)}$
13. $\int \frac{r^5\,dr}{\sqrt{4-r^6}}$
14. $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^4}$
15. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4x^2+9}}$
17. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$
18. $\int \sec^6 dx$
19. $\int \tan 2x\sec^2 2x\,dx$
20. $\int x10^{1+x^2}\,dx$
21. $\int x^{-1}(\log_3 x)^2\,dx$

22. $\int x5^{-x^2}\,dx$

23. $\int x\sin^3(\pi x^2)\cos(\pi x^2)\,dx$

24. $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$

25. $\int x^4 e^{-x^5}\,dx$

26. $\int xe^{x^2}\cos\left(3e^{x^2}\right)dx$

27. $\int \sec^5 x\tan x\,dx$

■

DAY 12
Substitution (part 2)

12.1 কিছু পরিচিত চেহারা

গতকাল যে $h(u(x))u'(x)$ প্যাটার্ণটা শিখলাম, সেটা বহু জায়গাতেই পাবে। এরকম তিনটে ক্ষেত্র এবার বলব।

12.1.1 Odd powers of sin and cos

এখানে আমরা এই ধরণের indefinite integral বার করতে শিখব--

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx,$$

যেখানে m আর n-এর মধ্যে অন্ততঃ একজন হল odd (বিজোড়), positive integer, আর অন্যজন যেকোনো real সংখ্যা হতে পারে। এখানে মনে রাখতে হবে খালি এইটুকু--

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\quad \frac{d}{dx}\sin x=\cos x \quad \text{এবং} \quad \frac{d}{dx}\cos x=-\sin x.$$

এখান থেকে আমরা symbolically লিখব--

$$d(\sin x)=\cos x\,dx \quad \text{এবং} \quad d(\cos x)=-\sin x\,dx.$$

একটা উদাহরণ দিয়ে শুরু করি।

Example 5: $\int \sin^3 x\sqrt{\cos x}\,dx = ?$

SOLUTION: এটা আসলে $\int \sin^3 x\cos^{1/2} x\,dx$. এখানে $\sin x$-এর power-এ একটা odd positive integer আছে (মানে 3), তাই এই অংকটা আমাদের আলোচনার আওতায় পড়ে। এখানে একটা ব্যাপার মাথায় রেখো-- যেহেতু $\cos x$-টা রয়েছে $\sqrt{\ }$-এর মধ্যে, তাই এখানে আমরা এমন কোনো interval-এর উপর কাজ করছি যেখানে $\cos x\geq 0$.

এখানে $\sin x$-এর power-টা হল odd, positive. আমাদের প্রথম কাজ হল তার থেকে একটা $\sin x$-কে নিয়ে dx-এর গায় লাগিয়ে দেওয়া--

$$\int \sin^3 x\sqrt{\cos x}\,dx = \int \sin^2 x\sqrt{\cos x} \times \sin x\,dx$$

এবার ওই $\sin x\,dx$-টাকে $-d(\cos x)$ হিসেবে লিখব।

$$= -\int \sin^2 x\sqrt{\cos x}\,d(\cos x)$$

শুরুতে $\sin x$-এর power-টা ছিল odd, এখন একটা $\sin x$ সরিয়ে নেওয়ার পর power-টা হয়ে গেল $3-1=2$, যেটা even. ওটাকে আমরা $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ ব্যবহার করে $\cos x$ দিয়ে লিখব।

$$= \int (1-\cos^2 x)\sqrt{\cos x}\,d(\cos x)$$

ব্যস্‌, $u = \cos x$ বসালেই চলবে এখন--

$$= \int (1-u^2)\sqrt{u}\,du \quad \left[\text{substituting } u = \cos x\right]$$

এবারকার কাজ সহজ, কারণ $(1-u^2)\sqrt{u} = u^{1/2} - u^{5/2}$-কে অনায়াসেই integrate করে ফেলা যাবে।

$$\int (1-u^2)\sqrt{u}\,du = \int u^{1/2} - u^{5/2}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2} - \frac{2}{7}u^{7/2} + c,$$

where c is the arbitrary constant of integration.

এবার আবার x-কে ফিরিয়ে আনব--

Now putting $\cos x$ for u we get

$$\int \sin^3 x\sqrt{\cos x}\,dx = \frac{2}{3}\cos^{3/2} x + \frac{2}{7}\cos^{7/2} x + c,$$

where c is the constant of integration.

■

এবার আরেকটা একইরকম অংক।

Exercise 3: $\int \cos^7 x\,dx = ?$

HINT: যদি $\cos^7 x$-কে $\sin^0 x \cos^7 x$ বলে ভাবা যায়, তবেই বুঝবে কেন আমাদের কায়দাটা কাজ করবে (এখানে 7 হল odd, positive integer)।
আমরা সাতটা $\cos x$-এর একটাকে আলাদা করে dx-এর গায় ভিড়িয়ে দেব। সেখান থেকে $\cos x\,dx$ হয়ে যাবে $d(\sin x)$. বাকি $7-1=6$-টা $\cos x$-কে $(\cos^2 x)^3 = (1-\sin^2 x)^3$ আকারে লিখলেই সব কিছু $\sin x$ দিয়ে লেখা যাবে। তারপর $u = \sin x$ বসালেই কাজ হবে। ■

এবার তোমার হাত পাকানোর জন্য আরো কিছু অংক।

Exercise 4: নীচের integral-গুলো বার করো।

1. $\int \sin^3 x\, dx$
2. $\int \cos^7 t\, dt$
3. $\int \cos^3 y \sqrt{\sin^3 y}\, dy$
4. $\int \cos^7 u \sin u\, du$
5. $\int \tan^3 z \sec^3 z\, dz$

■

Exercise 5: Let $n \geq 2$ be a natural number and $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Then

$$\int \frac{(\sin^n \theta - \sin \theta)^{1/n} \cos \theta}{\sin^{n+1} \theta}\, d\theta$$

is equal to

(A) $\frac{n}{n^2-1}\left(1 - \frac{1}{\sin^{n+1}\theta}\right)^{\frac{n+1}{n}} + C$

(B) $\frac{n}{n^2+1}\left(1 - \frac{1}{\sin^{n-1}\theta}\right)^{\frac{n-1}{n}} + C$

(C) $\frac{n}{n^2-1}\left(1 - \frac{1}{\sin^{n-1}\theta}\right)^{\frac{n+1}{n}} + C$

(D) $\frac{n}{n^2-1}\left(1 + \frac{1}{\sin^{n-1}\theta}\right)^{\frac{n-1}{n}} + C$

(JEE(main)2019)

HINT: প্রথমে $u = \sin \theta$ বসিয়ে একটু দলাইমলাই করলে পাবে

$$\int \frac{(1 - u^{-n+1})^{1/n}}{u^n} du.$$

এবার $t = 1 - u^{n+1}$ বসিয়ে চেষ্টা করো। (C). ■

Exercise 6:

1. $\int \sec^3 x\, dx$
2. $\int \cos^3 x \sin^5 x\, dx$
3. $\int \sin^4 x \cos^5 x\, dx$
4. $\int \sin^7 u\, du$
5. $\int \tan^3 x\, dx$
6. $\int \tan^3 x \sec^3 x\, dx$

■

একটু even power-দের নিয়ে কাজ করাও শিখে নাও। মনে রেখো, $\sin^2 x$ আর $\cos^2 x$-কে আমরা $\cos 2x$ দিয়ে লিখতে পারি--

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

যদি $\cos^4 x$ থাকে, তবে তাকে $\left(\cos^2 x\right)^2 = \frac{1}{4}(1+\cos 2x)^2$ আকারে লিখে ফের $\cos^2 2x$-কে একই কায়দায় $\cos 4x$ দিয়ে লিখতে পারবে। এইভাবে যেকোনো $\int \sin^{2n} x\,dx$ আর $\int \cos^{2n} x\,dx$-ই বার করা যাবে। এখানে n যতই বড় হবে, কাজটা ততই বিচ্ছিরি রকম লম্বা হবে, কিন্তু করা যে যাবে তাতে সন্দেহ নেই! নীচের অংকটা করে ব্যাপারটা শিখে নাও।

Exercise 7: বার করো--

1. $\int \sin^4 x\,dx$
2. $\int \sin^6 x\,dx$

■

12.1.2 $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx$ চেহারার integral

যদি কখনো এইরকম দেখতে কোনো integral পাও--

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx,$$

যেখানে integrand-টা একটা fraction-এর মত জিনিস, নীচে একটা function আর উপরে সেই function-টারই derivative, তবে সেটা integrate করে ফেলা খুব সহজ--

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \log|u(x)| + c.$$

এটাও আসলে সেই $h(u(x))u'(x)$ প্যাটার্নেরই একটা প্রয়োগ। এখানে integrand-টাকে তুমি $h(u(x))u'(x)$ বলে ভাবতে পারো, যেখানে $h(x) = \frac{1}{x}$. তাহলেই আমাদের প্যাটার্নের প্যাঁচটা খাটাতে পারবে। এখানে $u = u(x)$ বসালেই $\frac{du}{dx} = u'(x)$ পাবে, এবং সেখান থেকে symbolically লিখতে পারবে $du = u'(x)\,dx$. অতএব integral-টা হয়ে যাবে

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c.$$

সবশেষে u-এর জায়গায় $u(x)$-কে ফিরিয়ে আনলেই পাবে

$$\log|u(x)| + c.$$

একটা উদাহরণ দেখা যাক।

Example 6: $\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} = ?$

SOLUTION: এখানে নীচের তলায় রয়েছে x^2+1. তার derivative-টা হল $2x$. সেটাই উপরতলায় রয়েছে। সুতরাং উত্তর হবে $\log(x^2+1)+c$, যেখানে c হল arbitrary constant. এখানে $x^2+1>0$ হওয়ায় আলাদা করে আর absolute value নিতে হল না।
যদি ধাপগুলো বিশদ করে লিখতে চাও, তবে এইভাবে লিখতে পারো--

> We substitute $u = x^2 + 1$. So $\frac{du}{dx} = 2x$, or, symbolically, $du = 2x\,dx$. Hence,
>
> $$\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c = \log(x^2+1) + c,$$
>
> where c is the constant of integration.

■

অনেক সময়ে $\frac{u'(x)}{u(x)}$ রূপটা ছদ্মবেশে থাকে। যেমন নীচের অংকটায়।

Example 7: $\int \tan x\,dx = ?$

SOLUTION: এখানে $\tan x$-কে $\frac{\sin x}{\cos x}$ আকারে লিখলেই বুঝবে আমাদের প্যাঁচটা কেন খাটবে। নীচের তলার $\cos x$-টার derivative হল $-\sin x$, যেটা উপরতলায় বিরাজ করছে (বাইরে থেকে খালি একটা মাইনাস চালান দিতে হবে)। অতএব উত্তর হবে $-\log|\cos x| + c$, যেখানে c হল arbitrary constant.
বিশদ করে লিখতে চাইলে--

> We substitute $u = \cos x$. Then $\frac{du}{dx} = -\sin x$.
> Hence, symbolically, $du = -\sin x\,dx$. Now,
>
> $$\begin{aligned}\int \tan x\,dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx \\ &= -\int \frac{du}{u} \\ &= -\log|u| + c \\ &= -\log|\cos x| + c,\end{aligned}$$
>
> where c is an arbitrary constant.

■

Exercise 8: $\int \frac{4x^3-2x}{x^4-x^2+35}dx = ?$
HINT: নীচের তলার derivative হল উপরতলার জিনিসটা। সুতরাং $u = x^4 - x^2 + 35$ বসালেই হয়ে যাবে। ■

Exercise 9: নীচের integration-গুলো করো।

1. $\int \frac{x-1}{3x^2-6x+1}\,dx$.
2. $\int \cot x\,dx$
3. $\int \frac{dx}{x \log x}$
4. $\int \tanh x\,dx$. Here $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

5. $\int \coth x\, dx$. Here $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$.

■

এবার দুটো অংক দেখব, যাদের ক্ষেত্রে $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\, dx$ চেহারাটা পাওয়ার জন্য বেশ খানিকটা দলাইমলাই করে নিতে হবে।

Exercise 10: $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} =?$ আমরা জানি $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. এই তথ্যটা কাজে লাগিয়ে $\int \operatorname{cosec} x\, dx$ বার করো।
HINT: $\frac{1}{\sin x \cos x}$-কে $\frac{\sec^2 x}{\tan x}$ হিসেবে ভাবলে সুবিধা হবে। ■

Exercise 11: $\int \frac{t^2-t-2}{t^2-3t+1} dt =?$
HINT: $\frac{t^2-t-2}{t^2-3t+1} = 1 + \frac{2t-3}{t^2-3t+1}$. ■

Exercise 12:

1. $\int \frac{\operatorname{cosec} 2x}{\log \tan x} dx$
2. $\int \frac{x\, dx}{x^2-4}$

■

12.2 আন্দাজে substitution করা

অনেক সময়ে $h(u(x))u'(x)$ প্যাটার্ণটা না থাকলেও কোনো function-এর জায়গায় variable বসালে লাভ হতে পারে। এরকম দুটো ক্ষেত্র আলোচনা করব। এগুলো সবই আন্দাজী কায়দা। এগুলো ব্যবহার করে একটা integral-কে আরেকটা integral-এ পরিণত করে ফেলা যাবে। যদি সেই নতুন integral-টা করা সহজ হয় তো মার দিয়া কেল্লা! আর যদি তা না হয়, তবে বেজার মুখে আবার অন্য প্যাঁচ ভাবতে হবে।

12.2.1 $\tan \frac{x}{2}$-এর কায়দা

অনেক সময়ে $\sin x$, $\cos x$ বা $\tan x$-ওয়ালা বিভিন্ন integration-কে একটা substitution দিয়ে ঘায়েল করা যায়। সেটা হল $u = \tan \frac{x}{2}$ বসানো। এর কারণ হল $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ তিনজনকেই $\tan \frac{x}{2}$ দিয়ে লেখা যায়--

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \tan x = \frac{2u}{1-u^2}.$$

আবার $u = \tan \frac{x}{2}$-এর derivative-কেও u দিয়েই লেখা যায়--

$$\frac{du}{dx} = \tfrac{1}{2}\sec^2 \tfrac{x}{2} = \tfrac{1}{2}(1 + \tan^2 \tfrac{x}{2}) = \frac{1+u^2}{2}.$$

লক্ষ করো, এখানে $\frac{du}{dx}$-কে কিন্তু আমরা x দিয়ে লিখিনি, লিখেছি u দিয়ে। অনেকে লেখার সময়ে এটাকে একটু কায়দা করে লেখে--

$$dx = \frac{2\, du}{1+u^2}.$$

এই substitution-টা করলেই integral-টা এমন একটা নতুন integral-এ পরিণত হয়, যার মধ্যে আর কোথাও কোনো trigonometry-র গন্ধই নেই। অবশ্য তার মানেই এই নয় যে নতুন integral-টা কষে ফেলা সহজ হবে। নীচের অংকে অবশ্য আমরা এমন একটা উদাহরণ দিয়েছি, যেখানে নতুন integral-টা অতি সহজেই করে ফেলা যায়।

Example 8: $\int \frac{dx}{1+\cos x} =?$

SOLUTION:

We substitute $u = \tan\frac{x}{2}$. Then $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$.
Also, symbolically, $dx = \frac{2\,du}{1+u^2}$.
Hence

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{1}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \times \frac{2\,du}{1+u^2} = \int du = u + c = \tan\frac{x}{2} + c,$$

for arbitrary constant c.

■

Exercise 13: বার করো--

1. $\int \operatorname{cosec} x$. এই অংকটা একটু আগেই আমরা অন্যভাবে করেছি।
2. $\int \sec x$.

■

পরের অধ্যায়ে আমরা method of partial fractions বলে একটা কায়দা শিখব, যেটা দিয়ে এই ধরণের যেকোনো integral-কে সবসময়ে ঘায়েল করা যাবে--

$$\int \frac{u\text{-এর একটা polynomial}}{u\text{-এর আরেকটা polynomial}}\,du.$$

এরকম $\frac{\text{একটা polynomial}}{\text{আরেকটা polynomial}}$-জাতীয় function-দের অংকের ভাষায় একটা নাম আছে, **rational function**. আমাদের এই $u = \tan\frac{x}{2}$ বসানোর কায়দাটার মাহাত্ম্য এই যে, একটা trigonometric function-ওয়ালা integration-কে এটা অনেক সময়েই একটা rational function-এর integration-এ পরিণত করতে পারে, এবং তারপর method of partial fractions লাগালেই অংকটা হয়ে যেতে বাধ্য।

Exercise 14: নীচের integral-গুলোকে $t = \tan\frac{x}{2}$ বসিয়ে কোনো একটা rational function-এর integration-এ পরিণত কর।

1. $\int \frac{dx}{2-3\sin x}$
2. $\int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$
3. $\int \frac{dx}{8+4\sin x+7\cos x}$

HINT:
প্রথমটার বেলায় হবে $\int \frac{dt}{t^2-3t+1}$.
■

12.2.2 $\int h(x)\,dx$ থেকে $\int h(u(x))\,dx$ বার করা

একটা উদাহরণ দিয়ে শুরু করি।

Exercise 15: $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx = ?$

HINT: এখানে integrand-টার সর্বত্রই x আছে $\sqrt{x}$ আকারে। তাই integrand-টাকে ভাবতে পারো $h(\sqrt{x})$, যেখানে $h(x) = \frac{x}{1+x}$. যদি খালি $\int h(x)\,dx$ বার করতে দিত, তবে অসুবিধা ছিল না। সমস্যা হয়েছে ওই $\sqrt{x}$-টা এসেই। এরকম অবস্থায় অনেক সময়ে ওই সমস্যাজনক জিনিসটাকে u ধরে নিলে কাজ হয়।
যদি $u = \sqrt{x}$ বসাই, তবে $x = u^2$, এবং $dx = 2u\,du$ হবে। অতএব--

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx = \int \frac{2u^2}{1+u} du$$

হয়ে যাবে। এবার $t = 1 + u$ বসালেই হয়ে যাবে। ■

মোটামুটিভাবে এই আন্দাজী কায়দাটা হল, কোনো জিনিসকে সমস্যাজনক মনে হলেই সেটার জায়গায় একটা variable বসানো। কায়দাটা অবশ্য অধিকাংশ সময়েই কাজ করে না। যেমন $\sin x^3\,dx$-এর বেলায় যদি $u = x^3$ বসাও, তবে $x = u^{1/3}$ হবে, এবং $dx = \frac{1}{3}u^{-2/3}$ হবে। তার মানে integral-টা হয়ে যাবে $\frac{1}{3}\int u^{-2/3}\sin u\,du$, যেটা মোটেই সুবিধার ঠেকছে না।

Exercise 16:

1. $\int \frac{2\,dx}{x^{5/3} - 3x^{4/3} + 3x - x^{2/3}}$
2. $\int \frac{4x-1}{2x+\sqrt{x}} dx$
3. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+2x}$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-4}}$
5. $\int \frac{dx}{x^{1/2}+x^{3/2}}$
6. $\int \frac{x-1}{x+\sqrt{x}} dx$
7. $\int \frac{x-9}{3\sqrt{x}+x} dx$
8. $\int \frac{x^{1/2}}{1+x^{3/4}} dx$

■

DAY 13
Substitution (part 3)

13.1 Definite integration

ধরো $\int_a^b f(x)\,dx$ বার করতে হবে, যেখানে $f(x)$ একটা continuous function. এটা বার করার কায়দা আমরা শিখেছি এইরকম--

> প্রথমে $\int_a^b f(x)\,dx$-এর দুই প্রান্তের a, b দুটোকে ভুলে খালি $\int f(x)\,dx$ বার করতে হয়। ধরো এইভাবে পেলাম $F(x)+c$ (এখানে অবশ্য arbitrary constant-টার দরকার নেই)। এবার a, b ব্যবহার করে $F(b)-F(a)$ বার করতে হয়। সেটাই উত্তর।

যদি $\int f(x)\,dx$-টা substitution দিয়ে বার করা হয়, তবে এই কাজটা একটু শর্টকাটে করা যায়। এবার সেটাই নীচের উদাহরণে আলোচনা করব।

Example 9: $\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = ?$

SOLUTION: আমরা প্রথমেই শর্টকাটে যাব না, লম্বা পথেই এগোব। সেই পথে প্রথম কাজটা হল $\int xe^{x^2}\,dx$ বার করা। এখানে $u = x^2$ বসালে সুবিধা হবে। মনে রেখো, $d(x^2) = 2x\,dx$.

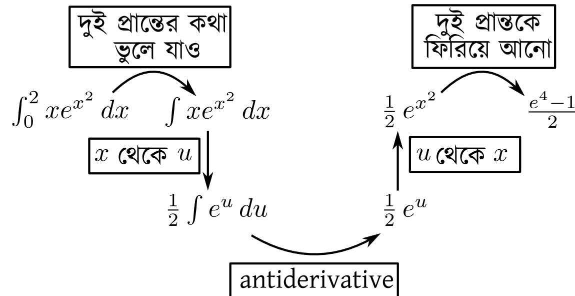
$$\begin{aligned}\int xe^{x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int e^{x^2}\,d(x^2)\\ &= \frac{1}{2}\int e^u\,du \quad \left[\text{substituting } u = x^2\right]\\ &= \frac{1}{2}e^u + c\\ &= \frac{1}{2}e^{x^2} + c,\end{aligned}$$

where c is an arbitrary constant.

এবার উপর আর নীচের প্রান্তদুটো ব্যবহার করব--

Hence $\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^2 = \frac{e^4-1}{2}$.

পুরো কাজটার ধাপগুলো হল এইরকম--



কিন্তু আমরা একই কাজ শর্টকাটে করতে পারতাম।

বিকল্প পদ্ধতি

এই পদ্ধতিতে আমরা indefinite integral করবই না, সব সময়েই definite integral-এর মধ্যেই থাকব। তার জন্য $u = x^2$ বসানোর সময়ে দুই প্রান্তের $x = 0$ আর $x = 2$-কেও আমরা $u = 0^2 = 0$ আর $u = 2^2 = 4$-এ পরিণত করব।

$$\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 e^u\,du$$

substituting $u = x^2$, and hence $dx = \frac{1}{2}u\,du$.

Also $x = 0 \implies u = 0^2 = 0$ and $x = 2 \implies u = 2^2 = 4$.

$$= \frac{1}{2}e^u\Big|_0^4 = \frac{e^4-1}{2}.$$

লক্ষ করো, আমাদের আর u-এর জায়গায় x-কে ফিরিয়ে আনার দরকারই পড়ল না। এই শর্টকাট পদ্ধতিতে ধাপগুলো হল--

$\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$

x থেকে u ↓

$\frac{1}{2}\int_0^4 e^u\,du$ → $\frac{1}{2}e^u\Big|_0^4 = \frac{e^4-1}{2}$

definite integral

চাইলে আরো সংক্ষেপে সেরে দিতে পারো--

$$\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^2 e^{x^2}\,d(x^2)$$

এখানে লক্ষ করো $\int$-এর নীচে খালি 0 না লিখে

$x = 0$ লিখেছি, কারণ এখানে integral-এর শেষে dx নেই, আছে $d(x^2)$.

খালি 0 আর 2 লিখলে মনে হতে পারে $x^2 = 0$ থেকে $x^2 = 2$ পর্যন্ত integrate করছি।

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 e^u\,du \quad \left[\text{substituting } u = x^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}e^u\Big|_0^4 = \frac{e^4-1}{2}.$$

■

Example 10: $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\,dx = ?$

SOLUTION:

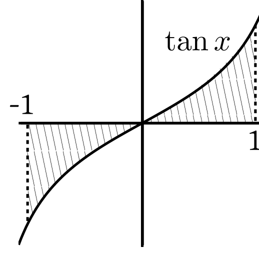


Fig 1

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\, dx &= \int_{x=0}^{\pi/2} \cos^4 x\, d(\sin x) \\
&= \int_0^1 (1-u^2)^2\, du \quad \left[\text{substituting } u = \sin x \right] \\
& \qquad x = 0 \implies u = 0 \text{ and } x = \tfrac{\pi}{2} \implies u = 1. \\
&= \int_0^1 (1 - 2u^2 + u^4)\, du \\
&= (u - \tfrac{2}{3}u^3 + \tfrac{1}{5}u^5)\Big|_0^1 = \frac{8}{15}.
\end{aligned}$$

■

Exercise 17: নীচের definite integral-গুলো বার করো। প্রতি ক্ষেত্রেই শর্টকাটে লেখার চেষ্টা করো।

1. $\int_1^2 x^2 \sin x^3\, dx$.
2. $\int_{-1}^{-2} \frac{x\, dx}{x^2+1}$.
3. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x}$.

■

Definite integral-এর সঙ্গে signed area-র ওতপ্রোত সম্পর্ক। নীচের অংকটায় অবশ্য বার করতে বলেছে geometric area. তাই একটু সাবধানে খেলতে হবে।

Exercise 18: Find the geometric area of the region bounded by the curve $\tan x$, the x-axis and the ordinates $x = -1$ and $x = 1$.
HINT: Fig 1 দেখে নিলে signed area-র সঙ্গে জ্যামিতিক area-এর সম্পর্কটা বুঝবে। ■

Exercise 19: If

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan\theta}{\sqrt{2k\, \sec\theta}}\, d\theta = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (k > 0),$$

then the value of k is

(A) 2

(B) $\frac{1}{2}$

(C) 4

(D) 1

(JEE(main)2019)

HINT:

যদি integrand-টাকে প্রথমে sin আর cos দিয়ে লিখে নাও, তাহলে পাবে--

$$\frac{\sin\theta}{\sqrt{2k\,\cos\theta}}.$$

এবার $\sin\theta\, d\theta$-কে $-d(\cos\theta)$ ভাবলেই হল। ■

Exercise 20: The integral

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin 2x(\tan^5 x + \cot^5 x)}$$

equals

(A) $\frac{1}{10}\left(\frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\left(\frac{1}{9\sqrt{3}}\right)\right)$

(B) $\frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\right)$

(C) $\frac{\pi}{10}$

(D) $\frac{1}{20}\tan^{-1}\left(\frac{1}{9\sqrt{3}}\right)$

(JEE(main)2019)

HINT:

এখানে তুমি নীচের তলার $\sin 2x$-টাকে $\sec^2 x$ আর $\tan x$ দিয়ে লিখে নাও। তাহলেই বাকিটা করে ফেলতে পারবে।

■

Exercise 21: If $\int \frac{x+1}{\sqrt{2x-1}}\, dx = f(x)\sqrt{2x-1} + c$, where c is a constant of integration, then $f(x)$ is equal to

(A) $\frac{1}{3}(x+4)$

(B) $\frac{1}{3}(x+1)$

(C) $\frac{2}{3}(x+2)$

(D) $\frac{2}{3}(x-4)$

(JEE(main)2019)

HINT:

এখানে চট্‌ করে বোঝা যাচ্ছে না কী করা উচিত। তা, বাঁদিক ডানদিক দুদিকেই $\sqrt{2x-1}$ আছে, এবং ওটাই এখানে সবচেয়ে বদখত জিনিস। এরকম অবস্থায় ওটার জায়গায় একটা variable বসানোটা একটা ভালো আন্দাজী কায়দা। যদি $u=\sqrt{2x-1}$ বসাও, তবে $du=\frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$ হবে, এবং সেখান থেকে অংকটা হয়ে যাওয়া উচিত। চাইলে $u=2x-1$ বসিয়েও চেষ্টা করতে পারো, তাতেও চলবে। ■

Exercise 22: The integral

$$\int \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{(\sin^5 x+\cos^3 x\sin^2 x+\sin^3 x\cos^2 x+\cos^5 x)^2}\,dx$$

is equal to

(A) $\frac{1}{3(1+\tan^3 x)}+c$

(B) $-\frac{1}{3(1+\tan^3 x)}+c$

(C) $\frac{1}{3(1+\cot^3 x)}+c$

(D) $-\frac{1}{3(1+\cot^3 x)}+c$

(JEE(main)2018)

HINT:

এত sin, cos-এর ছড়াছড়ি দেখে একটা প্ল্যান মাথায় আসে। উপর নীচ দুদিককেই cos-এর একটা বড় power দিয়ে ভাগ করে সব কিছুকে tan আর $\sec^2$ দিয়ে লেখা। এখানে নীচের তলায় একটা square আছে, আর তার মধ্যে প্রতিটা term-ই sin আর cos মিলিয়ে ঠিক পাঁচটা করে জিনিসের গুণফল। তাই $\cos^{10} x$ দিয়ে দুপাশকে ভাগ করলে সুবিধা হতে পারে। করেই দ্যাখো!

■

Example 11: The value of the integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{3\sqrt{\cos\theta}}{(\sqrt{\cos\theta}+\sqrt{\sin\theta})^5}\,d\theta$$

equals... **(JEE(adv)2019.II13)**

SOLUTION:এই অংকটা এমনিতে খুব একটা কঠিন নয়, কিন্তু একটা সমস্যা আছে, যেটা চট্‌ করে চোখে পড়ে না। প্রথমে সমস্যাটার তোয়াক্কা না করে এগোই। আমরা শুরুতে indefinite integral-টা নিয়ে কাজ করব।

$$
\begin{aligned}
\int \frac{3\sqrt{\cos\theta}}{(\sqrt{\cos\theta}+\sqrt{\sin\theta})^5}\,d\theta &= 3\int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{(1+\sqrt{\tan\theta})^5}\,d\theta \quad \left[\text{dividing by } \cos^{\frac{5}{2}}\theta\right]\\
&= 3\int \frac{dt}{(1+\sqrt{t})^5}\,d\theta \quad \left[\text{substituting } t=\tan\theta\right]\\
&= 3\int \frac{2(s-1)}{s^5}\,ds \quad \left[\text{putting } s=1+\sqrt{t}\right]\\
&= \ldots\\
&= \frac{1-2s}{s^4}.
\end{aligned}
$$

এবার ফের s থেকে t-তে, এবং সেখান থেকে θ-তে ফিরব।

Since,

$$s = 1+\sqrt{t} = 1+\sqrt{\tan\theta},$$

hence

$$
\begin{aligned}
\frac{1-2s}{s^4} &= \frac{1-2-2\sqrt{\tan\theta}}{(1+\sqrt{\tan\theta})^4}
\end{aligned}
$$

এবার উপর নীচ দু দিককেই $\cos^2\theta$ দিয়ে গুণ করব--

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\cos^2\theta(1+2\sqrt{\tan\theta})}{(\sqrt{\cos\theta}+\sqrt{\sin\theta})^4}\\
&= -\frac{\cos\theta(\cos\theta+2\sqrt{\sin\theta\cos\theta})}{(\sqrt{\cos\theta}+\sqrt{\sin\theta})^4}.
\end{aligned}
$$

এইবার অবশেষে আমরা definite integral-টার দুই প্রান্তকে ফিরিয়ে আনব--

At $\theta=0$, this is -1 and at $\theta=\frac{\pi}{2}$, this is 0.
So the required answer is $0-(-1)=1$.

তোমার হয়তো মনে হচ্ছে যে, ব্যাপারটা এত ঘুরিয়ে করছি কেন? আমরা যখন definite integral-এ substitution ব্যবহার করি, তখন তো দুই প্রান্তের উপরেও সেই substitution-টা লাগাই। এখানে খামোখা indefinite integral করে, তারপর ফের s থেকে θ-তে ফিরলাম? আসলে এখানে integral-টা ছিল 0 থেকে $\frac{\pi}{2}$ পর্যন্ত, আর আমরা $t=\tan\theta$ বসিয়েছিলাম। এদিকে $\tan\frac{\pi}{2}$ তো undefined [1]! সেই কারণেই আমরা যতক্ষণ t আর s নিয়ে কাজ করছিলাম, ততক্ষণ definite integral-এর মধ্যে থাকি নি। আসলে আমরা যা যা substitution করেছি, সেগুলো সবই কেবল $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$-এর উপরে খাটে, $\theta=\frac{\pi}{2}$ হয়ে গেলেই ঝঞ্ঝাট। সেই জন্যই এই ঘুরপথে এগোনো।
তবে যদি এত কিছু চিন্তা না করে স্রেফ $\tan\frac{\pi}{2}$ এর জায়গায় ∞ লিখতে আর পরে $\frac{1}{\infty}$-র জায়গায় 0 নিতে, তবেও একই উত্তরই আসত (কারণ ভাগ্যক্রমে দুটো গোঁজা এখানে কাটাকাটি হয়ে যেত)। তবে সেটা হত অনেকটা যেন সিঁড়ি ভাঙার কষ্টটা এড়াতে দোতলার জানলা থেকে লাফ দিয়ে নামার মত। হাড়গোড় আস্ত থাকলে ব্যাপারটা হয়তো খুবই cool, কিন্তু হাড়গোড় আস্ত থাকাটার কোনো গ্যারান্টি নেই! ■

[1] না, ∞ নয়, undefined!

DAY 14
Substitution (part 4)

আমরা গত দুদিন ধরে substitution ব্যবহার করে integration শিখছি। Substitution কায়দাটার জন্ম differentiation-এর chain rule-কে উল্টে। আমরা এই কদিন substitution-এর যে সংস্করণটা শিখেছি, তার মূলমন্ত্র হল--

যদি

$\int h(u(x))u'(x)\,dx$ বার করতে হয়,

তবে

$\int h(x)\,dx$ বার করতে পারাই যথেষ্ট।

এই কায়দাটা সেইসব ক্ষেত্রে কাজে লাগে, যেখানে $\int h(u(x))u'(x)\,dx$ বার করা কঠিন, কিন্তু $\int h(x)\,dx$ বার করা সহজতর। কিন্তু অনেক ক্ষেত্রে এর উল্টোটা দেখা যায়, মানে যেখানে $\int h(x)\,dx$ বার করাটাই কঠিন, কিন্তু এমন জুৎসই $u(x)$ পাওয়া যায়, যাতে $\int h(u(x))u'(x)\,dx$ বার করাটা সহজতর। এরকম ক্ষেত্রে আমরা substitution-এর আরেকটা সংস্করণ ব্যবহার করতে পারি, যাকে এই বইতে আমরা নাম দিয়েছি "variable-এর জায়গায় function বসানো"। এবার সেটাই বলব।

14.1 Variable-এর জায়গায় function বসানো

এক্ষুণি বললাম যে এমনটা হওয়া সম্ভব, যেখানে $\int h(x)\,dx$ বার করা কঠিন, অথচ কোনো একটা জুৎসই $u(x)$-এর জন্য $\int h(u(x))u'(x)\,dx$ বার করা সহজ। সত্যিই যে এমনটা হতে পারে, তার একটা উদাহরণ দেখে রাখি প্রথমে।

Example 12: ধরো $h:(-1,1)\to\mathbb{R}$ হল $h(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ আর $u:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to(-1,1)$ হল $u(x)=\sin x$.

আমরা এখনও পর্যন্ত integrate করার যা যা কায়দা শিখেছি, তার কোনোটা দিয়েই $\int h(x)\,dx$ বার করা সহজ ঠেকছে না। কিন্তু $\int h(u(x))u'(x)\,dx$ বার করার চেষ্টা করে দ্যাখো তো সেটা সহজে করা যাচ্ছে কিনা।
SOLUTION:

$$\begin{aligned}
\int h(u(x))u'(x)\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\times\cos x\,dx\\
&= \int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}}\,dx\\
&= \int \frac{\cos x}{\cos x}\,dx \quad \left[\because x\in\left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right) \quad \therefore \cos x>0\right]\\
&= \int dx\\
&\qquad \text{এই integral-টা তো জলভাত--}\\
&= x+c,
\end{aligned}$$

যেখানে c একটা arbitrary constant. ■

স্বভাবতঃই প্রশ্ন ওঠে $\int h(u(x))u'(x)\,dx$ বার করে ফেলতে পারলে, তা থেকে $\int h(x)\,dx$ বার করার কোনো সুবিধা হতে পারে কিনা। দুঃখের কথা, সব সময়ে সেটা সম্ভব নয়। কিন্তু যদি একটা বাড়তি শর্ত চাপাই, তবে সত্যিই কাজটা করা সম্ভব। এক কথায় বললে, সেই বাড়তি শর্তটা হল, $u(x)$-কে একটা one-one, onto function[2] হতে হবে।
বিশদ করে বললে--

[2]এখানে onto শর্তটাই বেশী জরুরী। কিন্তু সেই সঙ্গে one-one হলে কিছু বাড়তি সুবিধা হয়।

ধরো

- $h : I \to \mathbb{R}$ একটা function, যেটাকে integrate করতে চাইছি (এখানে I একটা interval, এবং ধরে নিচ্ছি যে $\int h(x)\,dx$-এর অস্তিত্ব আছে, অর্থাৎ $h(x)$-এর antiderivative আছে)।
- এমন একটা $u : J \to I$ পেয়েছি (J-ও একটা কোনো interval), যাতে $\int h(u(x))u'(x)\,dx$ বার করা যাচ্ছে।

এরকম অবস্থায় যদি

- $u(x)$-টা একটা one-one এবং onto function হয়,

তবে $\int h(u(x))u'(x)\,dx$ ব্যবহার করে $\int h(x)\,dx$ বার করা যায় এইভাবে--

> যদি $\int h(u(x))u'(x)\,dx = F(x) + c$ হয়, তবে $\int h(x)\,dx = F(u^{-1}(x)) + c$ হবে (যেখানে c একটা arbitrary constant), ব্যস্!

এখানে $u^{-1}(x)$ হল $u(x)$-এর **inverse,** মানে উল্টো। যেমন $u(x) = x^3$ হলে $u^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ হবে।
একটা অংক কষে পুরো ব্যাপারটা হজম করে নেওয়া যাক। জিনিসটা গুছিয়ে লেখার একটা কায়দা আছে। সেইসঙ্গে সেটাও শিখে নেওয়া যাবে।

Example 13: আবার সেই অংকটা, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$

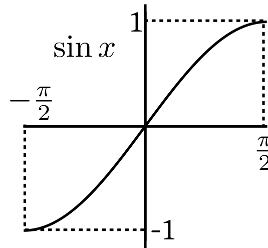
SOLUTION: এখানে integrand-টা হল $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. এর domain-টা কী হবে ভাবা যাক। যেহেতু $\sqrt{}$-এর পেটে $1 - x^2$ আছে, তাই x^2-কে ≤ 1 হতে হবে। মানে $x \in [-1, 1]$ চাই। আবার নীচের তলায় শূন্য এসে গেলে চলবে না, তাই $x \in (-1, 1)$ চাই। তার মানে $h : (-1, 1) \to \mathbb{R}$. আমাদের এমন $u(x)$ চাই, যেটা one-one এবং onto হয়, এবং যাতে $\int h(u(x))u'(x)\,dx$ সহজে বার করা যায়। এরকম একটা $u(x)$ আমরা আগেই দেখেছিলাম, $u(x) = \sin x$. এখানে $u : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-1, 1)$. এর inverse হল $\sin^{-1} x$. আমরা এবার $\int h(u(x))u'(x)\,dx$ বার করব। সেটা লেখার একটা প্রচলিত কায়দা আছে--

> The integrand has domain $(-1, 1)$.
>
> Now $\sin : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-1, 1)$ is one-one and onto.

এই one-one আর onto-র গল্পটা Fig 2 দেখলে বুঝতে পারবে, কারণ y-axis-এ -1 থেকে 1 পর্যন্ত যেখান দিয়েই horizontal লাইন আঁকো, সেটা গ্রাফটাকে ঠিক একটা বিন্দুতেই ছেদ করবে।

> We substitute $x = \sin u$ for $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
>
> Then, symbolically, $dx = \cos u\,du$.

Fig 2



So

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{\cos u\, du}{\sqrt{1-\sin^2 u}} \\
&= \int \frac{\cos u\, du}{\sqrt{\cos^2 u}} \\
&= \int \frac{\cos u\, du}{\cos u} \quad \left[\because u \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \quad \therefore \cos u > 0\right] \\
&= \int du = u + c \quad [\text{ where } c \text{ is an arbitrary constant}]
\end{aligned}$$

এবার u-এর জায়গায় সেই inverse-টা, মানে $\sin^{-1} x$ বসাব--

$$= \sin^{-1} x + c.$$

■

আমরা এই যে অংকটা করলাম, সেটা যেকোনো প্রচলিত বইতেই পাবে। কিন্তু আমরা এখানে কিছু বাড়তি জিনিস লিখেছি, যেগুলো খুবই দরকারী, কিন্তু অধিকাংশ বইতেই যাদের উল্লেখ থাকে না। সেগুলো ভালো করে বুঝে নাও। অনেক জায়গাতেই কিন্তু substitution-টার one-one[3] আর onto হওয়ার কথাটা বলতে ভুলে যায়। এবং সেইটা পরীক্ষার জন্য integrand-এর domain-টা জানা দরকার। এখানে সেটা ছিল $(-1, 1)$. আমরা $x = \sin u$ বসানোর আগে তাই স্পষ্ট করে লিখে নিয়েছিলাম--

> $\sin : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-1, 1)$ is one-one and onto.

এখানে $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ নেওয়ার আরেকটা সুবিধা হল $\cos u > 0$ হওয়া, যাতে কয়েক ধাপ পরে $\sqrt{\cos^2 u} = \cos u$ লেখা গেছিল। যদি $\cos u > 0$ না হত, তবে $\sqrt{\cos^2 u} = |\cos u|$ লিখে অনেক বেশী ঝকমারি করতে হত। যেহেতু অধিকাংশ বইতেই এতসব one-one আর onto-ফনটু নিয়ে মাথা ঘামায় না, এবং পরীক্ষাতেও ওসব না লিখলেও নম্বর পাওয়া যায়, তাই মনে হতে পারে বাড়তি লিখে সময় নষ্ট করব কেন! যদি এই দুর্বুদ্ধি তোমার মাথায় চেপে থাকে, তার প্রতিষেধক হিসেবে নীচের অংকটা দিয়ে রাখি।

Example 14: কাউকে বলা হয়েছিল $\int |x|\, dx$ বার করতে। সে $x = u^2$ বসিয়ে অংকটা করতে গেল। তার দুরবস্থা কারণসহ বর্ণনা কর।

SOLUTION: যেহেতু $x = u^2$ নিয়েছে, তাই $dx = 2u\, du$ হবে। সুতরাং $\int |x|\, dx$ পরিণত হয়েছে $\int |u^2|\, 2u\, du = 2\int u^3\, du$-তে। এটা তো অনায়াসেই কষে ফেলা যায়--

$$2\int u^3\, du = \frac{u^4}{2} + c,$$

যেখানে c হল arbitrary constant. এবার সে জানে $x = u^2$, তাই এটাকে x দিয়ে লিখেছে $\frac{1}{2}x^2 + c$. সুতরাং সে পরীক্ষার খাতায় "$\int |x|\, dx = \frac{1}{2}x^2 + c$" লিখে টাকডুমাডুম বলে মহা ফূর্তিতে বাড়ি চলে গেছে! অর্থাৎ তার দাবী হল $\frac{1}{2}x^2 + c$-কে differentiate করলে $|x|$ পাওয়া যায়। এদিকে দেখাই যাচ্ছে যে $\frac{1}{2}x^2 + c$-কে differentiate করলে হয় x. তার মানে ছাত্রটির দাবীটা দাঁড়াচ্ছে x এবং $|x|$ আসলে একই function! প্রশ্নটায় দশ নম্বর ছিল। মাষ্টারমশাই এই ছাত্রটিকে তার জায়গায় -10 দিয়েছেন। ছাত্র বেচারী এখন প্রতিবাদও করতে পারছে না, কারণ তার নিজের হিসেব অনুযায়ীই $-10 = |-10| = 10$ হয়!

এখানে $u(x) = x^2$-টা one-one বা onto নয় (মনে রেখো $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)। গোলমালটা বিশেষ করে হয়েছিল onto শর্তটা ভুলে যাওয়ার দরুণ। অংকটাতে integrate করতে হবে x-কে, যার domain হল পুরো $\mathbb{R}$. ওদিকে ও যে substitution-টা

[3] খুব খুঁটিয়ে দেখলে one-one শর্তটা ছাড়াও কাজ চালানো যায়। কিন্তু onto শর্তটা অপরিহার্য।

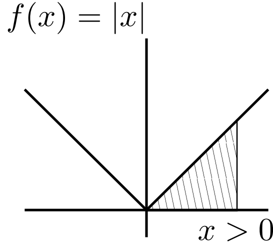


Fig 3

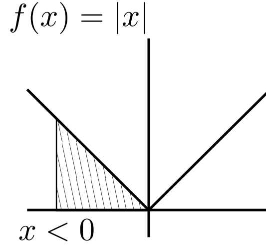


Fig 4

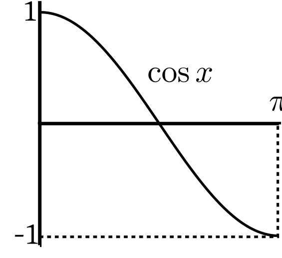


Fig 5

নিয়েছে, $x = u^2$, সেটা অনুযায়ী x-টা খালি ≥ 0 হতে পারে। সেই কারণে লক্ষ করো $x \geq 0$ হলে ওর উত্তরটা ঠিকই আছে, কারণ $x \geq 0$ হলে সত্যিই $x = |x|$ হয়। কিন্তু এই substitution-টা $x < 0$ সম্ভাবনাটাকে বেমালুম লোপাট করে দিয়েছে! আর সেই ফাঁকে মাষ্টারমশাইও টুক্ করে -10 নম্বর দিয়ে ফেলতে পেরেছেন! ■

পরীক্ষার খাতায় এরকম বিপর্যয় যে খুব ঘনঘন হয় না, তার প্রধান কারণ হল পরীক্ষার অংকগুলো সাধারণতঃ কয়েকটা বাঁধা গতের substitution ব্যবহার করেই হয়, এবং সৌভাগ্যক্রমে সেগুলো সত্যিই one-one এবং onto হয়। ঠিক যেমন চোখ বন্ধ করে রাস্তা পার হলেও লোকে বেঁচে যেতে পারে, যদি সৌভাগ্যক্রমে গাড়ির চালকরা চোখ খুলে গাড়ি চালায়!

Exercise 23: আচ্ছা, $\int |x|\, dx$ সত্যিই তাহলে কী করে বার করবে?
HINT: এখানে fundamental theorem of calculus লাগালে সুবিধা হবে। যেহেতু $|x|$ একটা continuous function, তাই $F(x) = \int_0^x |t|\, dt$ হবে এর একটা[4] antiderivative. এই definite integral-টা কিন্তু ছবি দিয়ে ভাবলেই বেরিয়ে যাবে। Fig 3 আর Fig 4 দ্যাখো। ■

একটু আগেই বললাম যে পরীক্ষার অংকগুলোতে কয়েকটা বাঁধা গতের substitution দিয়েই কাজ চলে যায়। তাদের মধ্যে একটার পরিচয় আমরা এক্ষুণি পেলাম, $x = \sin u$. যেখানেই $\sqrt{1-x^2}$ জাতীয় জিনিস দেখবে, সেখানেই এই substitution-টা খাটানোর চেষ্টা করা যায়। এর মূল শক্তিটা আসে $1 - \sin^2 u = \cos^2 u$ থেকে। একই যুক্তিতে $x = \cos u$ বসিয়েও চেষ্টা করা যায়। সেটাই পরীক্ষা করব নীচের অংকটায়।

Example 15: আবার $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ বার করো, কিন্তু এবার $x = \cos u$ বসিয়ে।

SOLUTION:

> The domain of the integrand is $(-1, 1)$.
> We substitute $x = \cos u$, where $\cos : (0, \pi) \to (-1, 1)$ is one-one and onto.

লক্ষ করো এখানে আমরা $u \in (0, \pi)$ নিয়ে কাজ করছি। এই one-one আর onto হওয়ার ব্যাপারটা Fig 5 দেখে বুঝে নাও। যদি y-axis-এর উপরে -1 থেকে 1 মধ্যে কোথাও একটা horizontal লাইন টানি, তবে সেটা গ্রাফটাকে ঠিক এক জায়গাতেই ছেদ করবে। এখানে inverse-টা হল $\cos^{-1} x$.

> Now $\frac{dx}{du} = -\sin u$.
> So, symbolically, $dx = -\sin u\, du$.

[4] এখানে integral-টার নীচে 0 না নিয়ে অন্য কিছুও নেওয়া যেত।

Hence

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{-\sin u}{\sqrt{1-\cos^2 u}} du \\ &= -\int \frac{\sin u}{\sin u} du \quad [\because u \in (0,\pi)]\end{aligned}$$

এখানে $u \in (0,\pi)$ হওয়ায় $\sin u > 0$ হবে। তাই $\sqrt{1-\cos^2 u} = \sin u$ হল।

$$= -\int du = -u + c$$

এবার u-এর জায়গায় x ফিরিয়ে আনতে হবে, তাই inverse-টার ডাক পড়বে--

$$= -\cos^{-1} x + c,$$

where c is an arbitrary constant.

আগের বারে উত্তর এসেছিল $\sin^{-1} x + c$. হঠাৎ দেখলে মনে হতে পারে যেন এটা অন্য একটা উত্তর। কিন্তু আসলে এটা একই উত্তর, কারণ $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$. সেই কারণে $\{\sin^{-1} x + c \ : \ c \in \mathbb{R}\}$ আর $\{-\cos^{-1} x + c \ : \ c \in \mathbb{R}\}$ আসলে একই set. ■

এবার তোমার জন্য $\sqrt{1-x^2}$-ওয়ালা আরেকটা অংক।

Exercise 24: $\int \sqrt{1-x^2} dx = ?$
■

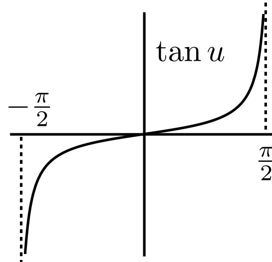
Exercise 25: এবারের অংকগুলো করতে $x = \cos u$ বসালে সুবিধা হবে।

1. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$.
2. $\int x^3 \sqrt{1-x^2}\, dx$.

■

আমরা জানতাম $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ হয়, সেখান থেকেই আন্দাজ করেছিলাম যে $x = \sin u$ বা $x = \cos u$ বসালে কাজ হতে পারে। একইভাবে $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ হয়। সুতরাং কোথাও $1 + x^2$ দেখলে $x = \tan u$ বসানোর চেষ্টা করা যেতে পারে।

Fig 6



Example 16: $\int \frac{dx}{1+x^2} = ?$

SOLUTION: এখানে আমাদের integrand-টা হল $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$, যেটার domain হল পুরো $\mathbb{R}$. আমরা বসাতে চাই $x = \tan u$. তার জন্য $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ নেব। লক্ষ করো এখানে $\tan u$-এর domain-টা একটা interval হচ্ছে এবং function-টা one-one আর onto-ও হচ্ছে। দরকার হলে Fig 6 দেখে নাও। এর inverse হচ্ছে $\tan^{-1} x$.

We substitute $x = \tan u$.

Then $\frac{dx}{du} = \sec^2 u$, or, symbolically, $dx = \sec^2 u\, du$. So the integral becomes

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+x^2} &= \int \frac{\sec^2 u\, du}{1+\tan^2 u} \\ &= \int du \\ &= u + c \end{aligned}$$

এবার inverse-টা কাজে লাগিয়ে আবার x-এর জগতে ফিরে যাব--

$$= \tan^{-1} x + c,$$

where c is the arbitrary constant of integration.

■

Exercise 26: নীচের অংক দুটো $x = \tan u$ বসিয়ে করো।

1. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$
2. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$

■

এইসব অংকে বলে দেওয়া থাকছিল কী substitution ব্যবহার করলে সুবিধা হবে। বলে না দেওয়া থাকলে সেটা বোঝার কোনো কায়দা আছে কি? দুঃখের কথা এই যে, এমন কোনো কায়দা নেই যেটা দিয়ে যেকোনো integration-এর বেলাতেই একটা উপযুক্ত substitution পাওয়া যায়। তবে কিছু কিছু বিশেষ ক্ষেত্র আছে, যেখানে integrand-এর চেহারাটা দেখেই মোটামুটি আন্দাজ করা যায় কী substitution লাগালে কাজ হতে পারে। এরকম কিছু চেহারার কথা আমরা কালকে আলোচনা করব।

14.2 Definite integral

Substitution-এর এই কায়দায় definite integral-ও বার করা যায়। একটা উদাহরণ দেখি।

Example 17: $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$

SOLUTION: আমরা এখানে $x = \sin u$ বসাব। এর ফলে integral-টা যখন u-এর integral-এ পরিণত হবে। দুই প্রান্তে যে 0 আর $\frac{1}{2}$ আছে, তারা হল x-এর value. আমরা substitution-টা করার সময়ে ওদেরকে u-এর value-তে পরিণত করব। যখন $x = 0$ তখন $u = \sin^{-1} 0 = 0$ আর $x = \frac{1}{2}$ হলে $u = \sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. সবটা মিলিয়ে লেখার কায়দাটা এইরকম--

The integrand is $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, with domain $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

We substitute $x = \sin u$ where $u \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$. This is a one-one and onto substitution.

When $x = 0$, we have $u = 0$.

When $x = \frac{1}{2}$, we have $u = \frac{\pi}{3}$.

Also, symbolically, $dx = \cos u\, du$.

So

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos u\, du}{\cos u} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} du = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

■

Exercise 27: Find the area of the region bounded by the curve $y = (1-4x^2)^{3/2}$, the x-axis, and the lines at $x = 0$ and $x = \frac{1}{2}$. ■

DAY 15
Substitution (part 5)

15.1 কিছু standard রূপ

কোন্ চেহারার integral-এর জন্য কোন্ substitution কাজে দেবে, তাই নিয়ে লোকে একসময়ে বিস্তর মাথা ঘামিয়েছে। ছাত্রছাত্রীদের মধ্যে অনেকসময়েই প্রচুর substitution-এর তালিকা মুখস্থ করার হিড়িক লক্ষ করা যায়। যে যতগুলো মুখস্থ করতে পারে, সে তত বেশী নম্বর পেয়ে যাবে, এরকম একটা বিশ্বাস কাজ করে এর পিছনে। এরকম বহুলব্যবহৃত কয়েকটা substitution আলোচনা করব এবার।

15.1.1 $\sqrt{a^2-x^2}$-ওয়ালা integral

যদি দ্যাখো integrand-এ $\sqrt{a^2-x^2}$ জাতীয় জিনিস আছে, তবে দুইরকমের substitution কাজ করতে পারে--

$$x = a\sin u \qquad \text{অথবা} \qquad x = a\cos u.$$

দুটোরই আচরণ একইরকম, একটা কাজ করলে অন্যটাও করবে, তাই যেকোনো একটা পরীক্ষা করে দেখাই যথেষ্ট। এরকম একটা উদাহরণ আমরা আগেই দেখেছি। আরো কিছু উদাহরণ দেখব এখানে।

Exercise 28: $\int (2-x^2)^{3/2} dx = ?$

HINT:

এখানে $2-x^2$-টাকে a^2-x^2 বলে কল্পনা করা যায়, যেখানে $a = \sqrt{2}$. এখানে integrand-এর domain-টা হল $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. আমরা $x = \sqrt{2}\sin u$ বসাব, যেখানে $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$.

লক্ষ করো, এই substitution-টা one-one এবং onto হচ্ছে, এবং এর inverse হবে $\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}$.

> We substitute $x = g(u) = \sqrt{2}\sin u$, where $g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ is one-one and onto.
> Then $\frac{dx}{du} = \sqrt{2}\cos u$, and so, symbolically, $dx = \sqrt{2}\cos u\, du$.
> Hence
>
> $$\begin{aligned} \int (2-x^2)^{3/2}\, dx &= \int (2 - 2\sin^2 u)^{3/2} \cos u\, du \\ &= 2\sqrt{2}\int \cos^4 u\, du \quad \left[\because u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right] \end{aligned}$$

এবার $\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$ ব্যবহার করে এগোতে হবে। সেটা তোমার জন্য রেখে দিলাম। ■

Exercise 29: নীচের integral-গুলো কষে হাত পাকিয়ে নাও।

1. $\int \sqrt{9 - x^2} dx$,
2. $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$,
3. $\int \frac{dx}{(2-x^2)^{3/2}}$.

■

যদি কখনো $\sqrt{ax^2 + bx + c}$-ওয়ালা কোনো integrand পাও, যেখানে $b^2 - 4ac > 0$ এবং $a < 0$, তাহলেও এই কায়দাটা খাটানো যায়। খালি শুরুতে $ax^2 + bx + c$-কে square complete করে লিখে নিতে হবে। একটা উদাহরণ দিয়ে দেখাই।

Exercise 30: $\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\, dx = ?$

HINT:

প্রথমে square complete করে এইভাবে লেখো--

$$3 - 2x - x^2 = 3 - (x^2 + 2x) = 3 - (x^2 + 2x + 1 - 1) = 4 - (x+1)^2 = 2^2 - (x+1)^2.$$

তাহলে

$$\begin{aligned} \int \sqrt{3 - 2x - x^2}\, dx &= \int \sqrt{2^2 - (x+1)^2}\, dx \\ &= \int \sqrt{2^2 - t^2}\, dt \quad \left[\text{substituting } t = x + 1\right] \end{aligned}$$

এবার যে $t = 2\sin u$ বসালেই কাজ হবে, সে তো জানোই! ■

এরপরের অংকটা দেখতে একটু খটোমটো, কিন্তু সামান্য দলাইমলাই করলেই দিব্যি পথে এসে যায়।

Exercise 31: The value of the integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \sqrt{3}}{((x+1)^2(1-x)^6)^{\frac{1}{4}}}\, dx$$

is... **(JEE(adv)2018.I7)**

HINT:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+\sqrt{3}}{((x+1)^2(1-x)^6)^{\frac{1}{4}}}\,dx = \cdots = (1+\sqrt{3})\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1-x)}.$$

এখানে আমরা $(1-x)(1+x) = 1-x^2$ ব্যবহার করেছি মাত্র। এবার ওই $\sqrt{1-x^2}$ দেখেই নিশ্চয়ই $x = \cos u$ বসাতে[5] লোভ হচ্ছে? লোভ জিনিসটা এমনিতে ভালো নয়, তবে অংকের দুনিয়ায় লোভের হাতছানিতে সাড়া দিতে আপত্তি নেই। আর গোটা দুয়েক ধাপ করলেই integrand-টা দেখবে দিব্যি $\operatorname{cosec}^2 \frac{u}{2}$ দিয়ে লেখা যাচ্ছে। বাকিটুকু নিজেই করে দ্যাখো! ■

Exercise 32: If

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\,dx = A(x)(\sqrt{1-x^2})^m + c$$

for a suitable chosen integer m and a function $A(x)$, where c is a constant of integration, then $\big(A(x)\big)^m$ equals

(A) $-\frac{1}{3x^2}$

(B) $-\frac{1}{27x^9}$

(C) $\frac{1}{9x^4}$

(D) $\frac{1}{27x^5}$

(JEE(main)2019)

HINT:

এখানে একটা সূক্ষ্ম ব্যাপার আছে যেটা অগ্রাহ্য করে গেলেও MCQ ঠাকুর পাপ দেবে না, কিন্তু অংকঠাকুরের মনোকষ্ট হবে। Integrand-টা ভালো করে লক্ষ করে দ্যাখো, ওর domain কিন্তু একটা interval নয়। যেহেতু $\sqrt{1-x^2}$ আছে, তাই $x \in [-1,1]$ চাই, আবার নীচের তলায় x আছে, তাই $x \neq 0$-ও চাই। সুতরাং domain টা হল $[-1,0)\cup(0,1]$. এই বইয়ের প্রথম অধ্যায়েই বলেছি যে, indefinite integral বার করার সময়ে আমরা ধরে নিই যে integrand-এর domain-টা একটা interval. তাই এখানে আমরা হয় $[-1,0)$-র মধ্যে আছি, আর নয়তো $(0,1]$-র মধ্যে।

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\,dx = -\int \tan^2 u \sec^2 u\,du \quad \Big[\text{putting } x = \cos u\Big]$$

এখানে কিন্তু $u \in [0,\pi]$ হলে চলবে না। কারণ $u = \frac{\pi}{2}$ হলে $x = \cos u = 0$ হয়ে যাবে। অতএব এখানেও হয় $u \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ বা $u \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ নিতে হবে। তবে কিনা MCQ ঠাকুর অত দেখেন না, তাই u কোথায় আছে সেটা চেপে গেলেও টের পাবেন না!

$$= -\int \tan^2 u\,d(\tan u)$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^3 u + c.$$

এবার এই জিনিসটাকে লিখতে হবে $A(x)(\sqrt{1-x^2})^m + c$ আকারে। তার জন্য এমন $A(x)$ আর m খুঁজে বার করব, যাতে $-\frac{1}{3}\tan^3 u = A(x)(\sqrt{1-x^2})^m$ হয়। মনে রেখো, $x = \cos u$. তাই আমরা চাইছি

$$-\frac{1}{3}\tan^3 u = A(x)\sin^m u.$$

[5]বা $x = \sin u$

আন্দাজ করতে পারছ যে $m = 3$ নিতে হবে। তাহলে $\tan^3 u$-এর উপর তলার $\sin^3 u$-টা ডানদিকের $\sin^m u$-এর সঙ্গে কেটে যাবে। এবার আর $A(x)$ বার করে ফেলতে কতক্ষণ? তবে সাবধান, $A(x)$ কিন্তু চায় নি, চেয়েছে $(A(x))^m$, মানে $(A(x))^3$.
■

Exercise 33:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-10x-21}}$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-4x-4x^2}}$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} dx$
5. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^4}}$
6. $\int \frac{x^2\,dx}{(4-x^2)^{3/2}}$

■

Exercise 34:

1. $\int \frac{3\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^{4/3}-x^2}}$

■

সব সময়েই অবশ্য অন্ধের মত substitution করা ভালো নয়। নীচের অংক দুটো তোমাকে সে কথাটাই মনে রাখতে সাহায্য করবে।

Exercise 35: $\int \frac{x,dx}{\sqrt{x^2-9}}$ ■

Exercise 36: $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{|9-x^2|}}$ ■

15.1.2 $\frac{1}{a^2+x^2}$-ওয়ালা integral

এই ক্ষেত্রে $x = a\tan u$ বসালে কাজ হতে পারে। এখানে আমরা $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ নেব। u থেকে x-এ ফেরার জন্য $u = \tan^{-1}\frac{x}{a}$ ব্যবহার করলেই হবে। এখানেও one-one, onto শর্তটা পালিত হচ্ছে।

Example 18: $\int \frac{dx}{4+x^2} =?$

SOLUTION: এখানে $x = 2\tan u$ বসালেই পাবে

$$\int \frac{\sec^2 u\,du}{1+\tan^2 u} = \int du = u + c = \tan^{-1}\tfrac{x}{2} + c,$$

যেখানে c হচ্ছে arbitrary constant. ■

Exercise 37:

1. $\int \frac{dx}{4x^2+12x+18}$
2. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$
3. $\int \frac{x\,dx}{1+x^4}$

■

Exercise 38:

1. $\int \frac{dx}{x^{4/3}+x^{2/3}}$
2. $\int \frac{e^{x/2}}{1+e^x}dx$
3. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$

■

15.1.3 $\sqrt{a^2+x^2}$-ওয়ালা integral

এই ধরণের integral করার আগে **hyperbolic function**-দের কথা একটু মনে করিয়ে দিই, বিশেষ করে দুজনের কথা, $\sinh u$ আর $\cosh u$. এদের সংজ্ঞা হল

$$\begin{aligned}\sinh u &= \frac{e^u - e^{-u}}{2}\\ \cosh u &= \frac{e^u + e^{-u}}{2}.\end{aligned}$$

এদের গ্রাফ দেখিয়েছি Fig 7 আর Fig 8-এ। এদের বেশ কয়েকটা ধর্ম sin আর cos-এর কথা মনে পড়িয়ে দেয়, সেই জন্যেই এদের নাম sin আর cos-এর সাথে তাল মিলিয়ে sinh আর cosh রাখা হয়েছে। ধর্মগুলো হল--

- ঠিক যেমন sin একটা odd function, তেমনি sinh-ও একটা odd function, মানে $\sinh(-u) = -\sinh u$.

Fig 7

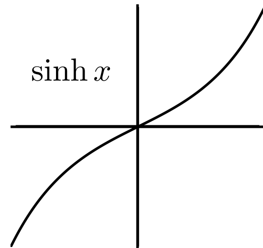
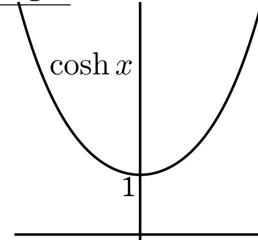


Fig 8



- আবার cos-এর মত cosh-ও একটা even function, মানে $\cosh(-u) = \cosh u$.
- $\frac{d}{du}\sinh u = \cosh u$. এটা তো একেবারেই $\frac{d}{du}\sin u = \cos u$-এর মত।
- $\frac{d}{du}\cosh u = \sinh u$. যদি sin আর cos নিয়ে কাজ করতাম, তবে ছিল $\frac{d}{du}\cos u = -\sin u$. এখানে মাইনাসটা নেই।
- $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$. এর সঙ্গে তুলনীয় sin আর cos-এর ফর্মুলাটা ছিল $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$. এখানে প্লাসের জায়গায় মাইনাস।

এবার cosh আর sinh-এর কিছু ধর্মের কথা বলি, যেগুলো একেবারেই cos বা sin-এর মত নয়--

- sinh হল $\mathbb{R}$ থেকে $\mathbb{R}$-এ একটা one-one এবং onto function. সেটা Fig 7-এর গ্রাফটা দেখেই আন্দাজ করা যাচ্ছে। কিন্তু sin মোটেই তা ছিল না। যেহেতু sinh হল one-one এবং onto, তাই ওর inverse আছে--

$$\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{1+x^2}).$$

- ওদিকে $\cosh u$ সর্বদাই ≥ 1. তাই আমরা বলতে পারি $\cosh : \mathbb{R} \to [1,\infty)$. ওটা one-one নয়, কিন্তু $[1,\infty)$-র যাবতীয় value নিতে পারে, তাই onto. এটাও গ্রাফ দেখে আন্দাজ করা যায় (Fig 8)। তবে যদি পুরো $\mathbb{R}$-এর বদলে domain-টাকে খালি $[0,\infty)$ নাও, তবে $\cosh : [0,\infty) \to [1,\infty)$ সত্যিই one-one, onto হবে। তার inverse হবে

$$\cosh^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1}).$$

Hyperbolic function-দের কথা অনেক হল। আবার integration-এর প্রসঙ্গে ফিরে আসি। যদি কোনো $\sqrt{a^2+x^2}$-ওয়ালা integral পাও, তবে $x = a\sinh u$ বসিয়ে চেষ্টা করে দেখতে পারো, যেখানে $u \in \mathbb{R}$. শেষে u থেকে x-এ ফেরার জন্য

$$u = \sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{1+x^2})$$

ব্যবহার করলেই হবে।

Example 19: $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = ?$

SOLUTION: এখানে $a = 2$ নিলে integrand-টা $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$ আকারের হয়। তাই আমরা $x = 2\sinh u$ বসিয়ে চেষ্টা করব। ছোট্টো করে one-one, onto শর্তটার কথাও লিখে নেব--

> The domain of the integrand is $\mathbb{R}$. We substitute $x = 2\sinh u$, which is one-one and onto $\mathbb{R}$. Then, symbolically, $dx = 2\cosh u\, du$.
>
> $$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\cosh u\, du}{2\cosh u} = \int du = u + c = \sinh^{-1} x + c = \log(x + \sqrt{1+x^2}) + c,$$
>
> where c is an arbitrary constant.

■

Example 20: The integral

$$\int \frac{dx}{x^2(x^4+1)^{3/4}}$$

equals

(A) $\left(\frac{x^4+1}{x^4}\right)^{1/4}+c$

(B) $(x^4+1)^{1/4}+c$

(C) $-(x^4+1)^{1/4}+c$

(D) $-\left(\frac{x^4+1}{x^4}\right)^{1/4}+c$

(JEE(main)2015)
SOLUTION:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2(x^4+1)^{3/4}} &= \int \frac{dx}{x^5(1+x^{-4})^{3/4}}\\ &= -\int \frac{t^3\,dt}{(1+t^4)^{3/4}} \quad \left[\text{substituting } t=\tfrac{1}{x}\right]\\ &= -\frac{1}{4}\int \frac{ds}{s^{3/4}} \quad \left[\text{substituting } s=1+t^4\right]\\ &= -s^{1/4}+c \quad [\,c \text{ arbitrary constant}]\\ &= -(1+t^4)^{1/4}+c=-(1+x^{-4})^{1/4}+c.\end{aligned}$$

So the answer is (D).

■

Exercise 39:

1. $\int \frac{dw}{\sqrt{9+w^2}}$
2. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{3+x^2}}$

■

Exercise 40: যদি $f(x)=x^2$-এর গ্রাফটা নিই, তবে $x=1$ থেকে $x=2$ পর্যন্ত গ্রাফটার দৈর্ঘ্য কত হবে?
HINT:
ফর্মুলাটা গত অধ্যায়েই শিখেছিলাম--

$$\int_1^2 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

এবার সেটা বার করতে পারবে। ■

15.1.4 $\sqrt{x^2-a^2}$-ওয়ালা integral

এরকম অংকে $x=a\cosh u$ বসালে অনেক সময়ে কাজ দেয়। আমরা এখানে $a>0$ ধরে নেব। আমরা এখানে function-টাকে নেব $[0,\infty)$ থেকে $[a,\infty)$-তে। তাহলে এটা one-one, onto হবে। এর inverse-এর কথাও আগেই বলেছি, $\cosh^{-1}\frac{x}{a}$, যেখানে

$$\cosh^{-1}x=\log(x+\sqrt{x^2-1}).$$

Example 21: $\int \sqrt{x^2-2^2}\,dx = ?$

SOLUTION: এখানে প্রথমেই একটা ব্যাপার লক্ষ করো। Integrand-এর domain হল $(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$. আমরা এ বইয়ের প্রথম অধ্যায়েই বলেছি যে, indefinite integral বার করার সময়ে আমরা সব সময়ে ধরে নিই যে integrand-এর domain-টা কোনো একটা interval. কিন্তু $(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$ মোটেই একটা interval নয়, দুটো আলাদা interval জুড়ে তৈরী। সেই কারণে আমরা পুরো $(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$ নিয়ে কাজ না করে ধরে নেব যে, আমরা এমন কোনো interval-এর উপরে কাজ করছি যেটা হয় $(-\infty,-2]$-এর মধ্যে আছে, বা $[2,\infty)$-এর মধ্যে।

> Here the domain of the integrand is some interval in $(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$.
>
> We substitute $x = 2\cosh u$, for $u \geq 0$.

আমরা চাইলে $u \leq 0$ নিয়েও কাজ করতে পারতাম। Fig 8 দেখলেই বুঝবে যে $\cosh u$-এর গ্রাফটা $u=0$-র দুই পাশে symmetric.
আমাদের substitution-টা যে one-one, onto, সেটা একটু উল্লেখ করে দেওয়া ভালো।

> This substitution is one-one, onto.
>
> Then $\frac{dx}{du} = 2\sinh u$, and so, symbolically, $dx = 2\sinh u\,du$.
>
> Hence
>
> $$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-4}\,dx &= 2\int \sqrt{4\cosh^2 u - 4}\sinh u\,du\\ &= 4\int \sinh^2 u\,du \quad [\because u \geq 0]\end{aligned}$$
>
> যদি $u \leq 0$ নিয়ে কাজ করতাম, তবে খালি একটা বাড়তি মাইনাস চিহ্ন আসত।
>
> $$\begin{aligned}&= \int (e^u - e^{-u})^2\,du\\ &= \int e^{2u} + e^{-2u} - 2\,du\\ &= \frac{1}{2}e^{2u} - \frac{1}{2}e^{-2u} - 2u + c \quad [\,c \text{ arbitrary constant}]\end{aligned}$$
>
> এইবার u থেকে x-এ ফেরার পালা। তার জন্য $u = \cosh^{-1}\frac{x}{2}$ বসাব।
>
> $$= \frac{\exp\left(2\cosh^{-1}\frac{x}{2}\right) - \exp\left(-2\cosh^{-1}\frac{x}{2}\right)}{2} - 2\cosh^{-1}\frac{x}{2} + c.$$

মনে আছে নিশ্চয়ই যে $\cosh^{-1}x = \log(x+\sqrt{x^2-1})$. এটা দেখতে খুব সুবিধার নয়। কিন্তু e-এর power-এর সঙ্গে log-টা কাটাকাটি হয়ে যাবে। তাই--

> Now
>
> $$\begin{aligned}\exp\left(2\cosh^{-1}\frac{x}{2}\right) &= \frac{1}{4}(x+\sqrt{x^2-4})^2\\ \exp\left(-2\cosh^{-1}\frac{x}{2}\right) &= 4(x+\sqrt{x^2-4})^{-2}\end{aligned}$$

এখানে একটা ব্যাপার মাথায় রাখলে সুবিধা হবে--

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{4}(x-\sqrt{x^2-4}).$$

এটা দেখানো খুব সোজা। উপর নীচ দু দিককেই $(x-\sqrt{x^2-4})$ নিয়ে গুণ করে a^2-b^2 ফর্মুলা লাগালেই হল।

> We know $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{4}(x-\sqrt{x^2-4})$.
> So $\exp(-2\cosh^{-1}x) = \frac{1}{4}(x-\sqrt{x^2-1})^2$. Hence
>
> $$\exp(2\cosh^{-1}x) - \exp(-2\cosh^{-1}x) = \cdots = x\sqrt{x^2-4}.$$

এখানে $(a+b)^2-(a-b)^2$-এর ফর্মুলা লাগিয়েছি।
মনে রেখো এর সঙ্গে আরো একটা $-2\cosh^{-1}\frac{x}{2}$ ছিল। সেটাকে বড় করে লিখলে হয়--

$$-2\cosh^{-1}\frac{x}{2} = \cdots = -2\log(x+\sqrt{x^2-4}) + 2\log 2.$$

সব মিলিয়ে তাহলে পাচ্ছি--

> $$\int \sqrt{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} - 2\log(x+\sqrt{x^2-4}) + 2\log 2 + c,$$
>
> where c is an arbitrary constant.

এখানে অনেক সময়ে লোকে ওই $2\log 2$-টাকে c-এর মধ্যে ঢুকিয়ে উত্তর লেখে $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} - 2\log(x+\sqrt{x^2-4}) + c$.
■

Exercise 41:

1. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$
2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}}$

HINT: এই অংকগুলোতে $\sec^2 x - 1 = \tan^2 x$ ব্যবহার করলে সুবিধা হতে পারে। যেমন ধরো, প্রথম অংকটায় $x = 3\sec u$ বসিয়ে দেখতে পারো।
■

Answers

1. *(i)* $u=\cos x$ *(ii)* $u=\tan x$ *(iii)* $u=x^4$ *(iv)* $u=\log x$ *(v)* $u=5x^2+2x-4$
(vi) $u=x^2+1$ *(vii)* $u=x^2$
2. *(i)* $\frac{1}{2}e^{x^2+4x}+c$. *(ii)* $\frac{3}{(}\tan^{-1}x)^3]+c$. *(iii)* $x-2\log(1+e^x)+c$. *(iv)* $\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{3/2}+c$.
(v) $-\frac{2}{3(x^3+1)}+c$. *(vi)* $-\frac{2\,(\sin x)^{\frac{5}{2}}-10\sqrt{\sin x}}{5}+c$. *(vii)* $\frac{1}{2}\log_7 x\log x+c$. মনে রেখো,
$\log_7 x = \log x/\log 7$. *(viii)* $-\frac{1}{5+\tan x}+c$. *(ix)* $\frac{1}{4}\tan^{-2}2x+c$. *(x)* $-\frac{1}{8(1+\tan^4 x)^2}+c$. *(xi)* $-\frac{1}{\log x}$

(xii) $\tan^{-1}(\log\log x)+c.$ $(xiii)$ $-\frac{\sqrt{4-x^6}}{3}+c.$ (xiv) $-\frac{1}{6\,(1+x^2)^3}+c.$ (xv) $-\sqrt{1-x^2}+c.$
(xvi) $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+9}+c.$ $(xvii)$ $\int\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+c.$ $(xviii)$ $\frac{\tan^5 x}{5}+\frac{2\,\tan^3 x}{3}+\tan x+c.$ (xix) $\frac{1}{4}\tan^2 2x+c.$
(xx) $\frac{10^{1+x^2}}{2\log 10}+c.$ (xxi) $\frac{(\log x)^3}{3(\log 3)^2}+c.$ $(xxii)$ $-\frac{1}{2\,\log 5\,5^{x^2}}+c.$ $(xxiii)$ $\frac{1}{8\pi}\sin^4(\pi x^2)+c.$
$(xxiv)$ $\frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2}+c.$ (xxv) $-\frac{1}{5}e^{-x^5}+c.$ $(xxvi)$ $\frac{1}{6}\sin(3e^{x^2})+c.$ $(xxvii)$ $\frac{1}{5}\sec^5 x+c.$

3. $\sin x-\sin^3 x+\frac{3}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+c.$ **4.** (i) $u=\cos x$ (ii) $u=\sin t$ (iii) $u=\sin y$ (iv) $v=\cos u$ (v) $u=\sin z$

6. (i) $\frac{\log(1+\sin x)}{4}-\frac{\log(\sin x-1)}{4}-\frac{\sin x}{2\,\sin^2 x-2}+c.$ (ii) $-\frac{3\,\sin^8 x-4\,\sin^6 x}{24}+c.$
(iii) $\frac{63\,\sin^5 x-90\,\sin^7 x+35\,\sin^9 x}{315}+c.$ (iv) $\frac{\cos^7 u}{7}-\frac{3\,\cos^5 u}{5}+\cos^3 u-\cos u+c.$
(v) $\frac{\log\left(\sin^2 x-1\right)}{2}-\frac{1}{2\,\sin^2 x-2}+c.$ (vi) $-\frac{5\,\cos^2 x-3}{15\,\cos^5 x}+c.$

7. (i) $\frac{\frac{x}{2}-\frac{\sin(2\,x)}{2}+\frac{2\,x+\frac{\sin(4\,x)}{2}}{8}}{2}+c.$ (ii) $\frac{\frac{x}{4}-\frac{3\,\sin(2\,x)}{8}-\frac{\sin(2\,x)-\frac{\sin^3(2\,x)}{3}}{8}+\frac{3\left(2\,x+\frac{\sin(4\,x)}{2}\right)}{16}}{2}+c.$

8. $\log|x^4-x^2+35|+c.$ **9.** (i) $\frac{1}{6}\log|3x^2-6x+1|+c.$ (ii) $\log|\sin x|+c.$ (iii) $\log|\log x|+c.$ (iv) $\log\cosh x+c.$ (v) $\log|\sinh x|+c.$

10. $\log\sin x-\frac{\log\left(\sin^2 x-1\right)}{2}+c.$ **11.** $t+\log|t^2-3t+1|+c.$ **12.** (i) $\frac{1}{2}\log|\log\tan x\|+c.$ (ii) $\frac{1}{2}\log|x^2-4|+c.$ **13.** (i) $\frac{\log(\cos x-1)}{2}-\frac{\log(1+\cos x)}{2}$ (ii) $\frac{\log(1+\sin x)}{2}-\frac{\log(\sin x-1)}{2}$

14. (i) $\int\frac{dt}{t^2-3t+1}$. (ii) $\int\frac{2(t^2-1)}{(t^2+1)(t^2-2t-1)}dt.$ (iii) $\int\frac{2t\,dt}{t^2+8t+15}$.

15. $-4\,(1+\sqrt{x})+(1+\sqrt{x})^2+2\,\log(1+\sqrt{x})+c.$ **16.** (i) $-\frac{6}{2\,x^{\frac{2}{3}}-4\,x^{\frac{1}{3}}+2}+c.$
(ii) $2\,x-2\sqrt{x}+c.$ (iii) $2\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}+1}-2\,\log(1+\sqrt{x})\right)+c.$ (iv) $\sqrt{2x-4}+c.$
(v) $2\,\tan^{-1}\sqrt{x}+c.$ (vi) $x-2\sqrt{x}+c.$ (vii) $x-6\sqrt{x}+c.$ $(viii)$ $\frac{4\left(1+x^{\frac{3}{4}}\right)}{3}-\frac{4\,\log\left(1+x^{\frac{3}{4}}\right)}{3}+c.$

17. (i) $\frac{\cos 8-\cos 1}{3}$. (ii) $\frac{1}{2}\log\frac{5}{2}$. (iii) 2.

18. $-1+\sec^2 1.$ **19.** (A). **20.** (A). এক জায়গায় $\int\frac{dt}{t(t^5+t^{-5})}$-কে সাজিয়ে $\int\frac{t^4\,dt}{(t^5)^2+1}$ করে নিতে হবে।

21. (A). **22.** (B). **23.** $\int|x|\,dx=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+c & \text{if } x\geq 0\\ -\frac{1}{2}x^2+c & \text{otherwise}\end{cases}$. **24.** $\frac{1}{2}(\sin^{-1}x+x\sqrt{1-x^2})+c.$

25. (i) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+c.$ (ii) $-\frac{x^2\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{5}-\frac{2\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{15}+c.$

26. (i) $\frac{\tan^{-1}x}{2}+\frac{x}{2\,x^2+2}+c.$ (ii) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+c.$

27. $\frac{3\pi}{32}$. **28.** $\frac{3\,\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{2}+\frac{x\left(2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4}+\frac{3\,x\sqrt{2-x^2}}{4}+c.$ **29.** (i) $\frac{9\,\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)}{2}+\frac{x\sqrt{9-x^2}}{2}+c.$
(ii) $\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+c.$ (iii) $\frac{x}{2\sqrt{2-x^2}}+c.$

30. $\frac{x\sqrt{-x^2-2\,x+3}}{2}+\frac{\sqrt{-x^2-2\,x+3}}{2}-2\,\arcsin\left(\frac{-2-2\,x}{4}\right)+c.$

31. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1-x)}=-\int\frac{du}{(1-\cos u)}=\frac{1}{2}\int\text{cosec}^2\,\frac{u}{2}\,du=-\int\text{cosec}^2\,v\,dv=\cot v+c.$ **32.** (B).

33. (i) $-\arcsin\left(\frac{-10-2\,x}{4}\right)+c.$ (ii) $-\frac{\arcsin\left(\frac{-4-8\,x}{12}\right)}{2}+c.$ (iii) $\frac{\arcsin\left(\frac{2\,x}{3}\right)}{2}+c.$
(iv) $\arcsin(2\,x-1)+c.$ (v) $-\frac{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{9-x^4}}{x^2}\right)}{2}+c.$ (vi) $\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}-\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+c.$

34. (i) $\int\frac{3}{2}\sin^{-2}x+c.$ (ii) $\sin^{-1}x^{1/3}+c.$

35. $\sqrt{(}x^2-9)+c.$ **36.** $c+\begin{cases}-\sqrt{9-x^2} & \text{if } x\in[-3,3]\\ \sqrt{x^2-9} & \text{if } x\in(-\infty,-3)\cup(3,\infty)\end{cases}$.

37. (i) $\frac{\tan^{-1}\left(\frac{6+4\,x}{6}\right)}{6}+c.$ (ii) $\frac{\tan^{-1}\left(\frac{2+2\,x}{4}\right)}{2}+c.$ (iii) $\frac{\tan^{-1}x^2}{2}+c.$

38. (i) $3\tan^{-1}x^{\frac{1}{3}}+c$. (ii) $2\tan^{-1}e^{\frac{x}{2}}+c$. (iii) প্রথমে $t=\tan\frac{x}{2}$ বসালে হবে $2\int\frac{dt}{t^2+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{3}}+c=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{3}}+c$.

39. (i) $\sinh^{-1}\frac{w}{3}+c$. (ii) $-\frac{\sqrt{x^2+3}}{3\,x}+c$.

40. $\frac{1}{4}\sinh^{-1}2$. **41.** (i) $3\,\text{arcsin}\left(\frac{3}{|x|}\right)+\sqrt{x^2-9}+c$. (ii) $-\text{arcsin}\left(\frac{1}{2\,|x|}\right)+c$.

Chapter IV
Integration by parts

DAY 16
গোড়ার কথা

আমরা আগেই দেখেছি যে, differentiation-এর সূত্রগুলোকে উল্টে integration-এর সূত্র বানানো যায়। Differentiation-এর গুণের সূত্রটা ছিল এইরকম--

যদি $u(x)$ আর $v(x)$ দুজনেই differentiable হয়, তবে $u(x)v(x)$-ও differentiable হবে, এবং

$$\frac{d}{dx}\big(u(x)v(x)\big) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

এটাকে ওল্টালে integration করার একটা কায়দা পাওয়া যায়। কয়েকটা উদাহরণ নিয়ে বোঝা যাক।

Example 1: প্রথমে xe^x-কে differentiate করো। সেটা ব্যবহার করে $\int xe^x\,dx$ বার করো।

SOLUTION: গুণের সূত্র লাগালেই differentiation-টা হয়ে যাচ্ছে--

$$\frac{d}{dx}(xe^x) = e^x + xe^x.$$

সুতরাং এটাকে উল্টে বলতে পারি,

$$\int (e^x + xe^x)\,dx = xe^x + c_1, \qquad (*)$$

যেখানে c_1 হল arbitrary constant.
এদিকে আমরা জানি যে $\int e^x\,dx = e^x + c_2$, যেখানে c_2 একটা arbitrary constant. সুতরাং (*) থেকে পেয়ে যাচ্ছি--

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx + c_1 = xe^x - e^x + c,$$

যেখানে c_1 আর c_2-কে মিলিয়ে আমরা একটা নতুন arbitrary constant বানিয়েছি c. ■

Exercise 1: একই কায়দা আরেকবার লাগিয়ে দ্যাখো তো $\int x^2e^x\,dx$ বার করতে পারো কিনা।
HINT: প্রথমে x^2e^x-কে differentiate করে শুরু করো।
■

আরেকটা একইরকম অংক দেখি।

Example 2: প্রথমে $\frac{d}{dx}(x\sin x)$ বার করো, এবং সেটা ব্যবহার করে $\int x\cos x\,dx$ বার করো।

SOLUTION: $\frac{d}{dx}(x\sin x) = \sin x + x\cos x$.
তাই $\int(\sin x + x\cos x)\,dx = x\sin x + c_1$, যেখানে c_1 একটা arbitrary constant.
এদিকে $\int \sin x = -\cos x + c_2$. এখানে c_2 ফের একটা arbitrary constant.
অতএব $\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx + c_1 = x\sin x + \cos x + c$, যেখানে c একটা arbitrary constant.
■

Exercise 2: আগের অংকটা ভালো করে দেখে নিয়ে সেই একই কায়দায় $\int x\sin x\,dx$ বার করো দেখি। ■

এই যে কয়টা অংক শিখলে তারই নির্যাসটুকু নিয়ে তৈরী **integration by parts.** প্রতি ক্ষেত্রেই আমরা শুরু করছিলাম differentiation-এর গুণের সূত্র দিয়ে। সেটা ছিল

$$\frac{d}{dx}\big(u(x)v(x)\big) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

এটাকে উল্টে আমরা বলতে পারি যে, $\int\big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big)\,dx = u(x)v(x) + c_1$. সুতরাং যদি $\int u'(x)v(x)\,dx$ আর $\int u(x)v'(x)\,dx$-এর মধ্যে একটাকেও আমরা বার করতে পারি, তবে অমনি অন্যটাও বেরিয়ে যাবে। যেমন, যদি $\int u'(x)v(x)\,dx$ জানি, তবে পাব নীচের theorem-টা--

Integration by parts

If $u(x)$, $v(x)$ are differentiable functions, and $\int u'(x)v(x)\,dx$ exists, then

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

এখানে আমরা arbitrary constant-টাকে আর আলাদা করে লিখি নি, কারণ ডানদিকের integral-টার মধ্যে একটা arbitrary constant রয়েইছে।
Integration by parts ব্যাপারটা অনেকটা ব্যবসাতে টাকা খাটিয়ে আরো টাকা করার মত। যদি তুমি ডানদিকের integral-টা কষতে পরো, তবে সেইটা খাটিয়ে বাঁদিকের integral-টাও বার করে ফেলতে পারছ। এখানে $v(x)$-টা কতটা জটিল, তার উপরে নির্ভর করে কাজটা দুভাবে করা যেতে পারে। একে একে আলোচনা করি।

16.1 যখন $v(x)$ বেশ সহজ দেখতে

"বেশ সহজ দেখতে" মানে কী, সেটা একটু বলে নিই প্রথমে। আমরা জানি যে $v'(x)$-কে $\frac{dv}{dx}$ আকারেও লেখা যায়। এ থেকে symbolically লিখতে পারি $dv = v'(x)\,dx$. যেমন $d(e^x) = e^x\,dx$ আর $d(\sin x) = \cos x\,dx$, এইরকম।
অনেক সময়ে একটা integral-এর মধ্যে খানিকটা অংশকে চট্ করে চোখে দেখেই dv আকারে লেখা যায়। সেরকম কেসেই বলছি যে $v(x)$-টা সহজ দেখতে। এরকম কিছু কেস দেখে হাত (নাকি চোখ?) পাকিয়ে নাও নীচের অংকটায়।

Exercise 3: দুই সারির জিনিসকে match করাও।

$d(e^x)$	$-\sin x\,dx$
$d(e^t)$	$e^t\,dt$
$d(\log x)$	$-\frac{dx}{2x^{3/2}}$
$d(\cos x)$	$e^x\,dx$
$d(1/\sqrt{x})$	$\frac{dx}{x}$

■

Exercise 4: dv আকারে লেখো--

1. $\sec^2 x\,dx$.
2. $x\,dx$.
3. $x^2\,dx$.
4. $\sqrt{x}\,dx$.
5. $\frac{dx}{x}$.

HINT: প্রথমটার উত্তর হল $d(\tan x)$.
■

যদি integral-এর ভিতরে dv অংশটাকে সহজে চিনতে পারো, তাহলে integration by parts-এর সূত্রটাকে এইভাবে মনে রাখলে সুবিধা হবে--

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

একটা উদাহরণ দেখাই।

Example 3: $\int xe^x\,dx = ?$

SOLUTION: চট্ করে চোখে পড়ছে $e^x dx$-কে $d(e^x)$ লেখা যায়। ব্যস্, অমনি--

$$\int xe^x dx = \int xd(e^x).$$

এবার integration by parts লাগানো যাবে--

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{d(e^x)}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v}\underbrace{dx}_{du} = xe^x - e^x + c,$$

যেখানে c হল arbitrary constant. ■

যখন আমরা dv খুঁজছি, তখন অনেক সময়েই লক্ষ করবে যে কাজটা একাধিকভাবে করা যায়। যেমন, এই integral-টাতেই আমরা আরেকভাবেও dv নিতে পারতাম। তাতে কাজ হত কিনা সেটা নিয়েই নীচের অংকটা।

Example 4: আবার $\int xe^x\,dx$ নিয়ে কাজ করব। আগের অংকটায় আমরা $e^x\,dx$-কে $d(e^x)$ লিখেছিলাম। কিন্তু চাইলে

তো আমরা $x\,dx = d\left(\frac{x^2}{2}\right)$-ও নিতে পারতাম। তাতে সুবিধা হত কি?

SOLUTION: এইভাবে dv নিয়ে by parts করার চেষ্টা করা যাক--

$$\int xe^x\,dx = \int \underbrace{e^x}_{u}\underbrace{d\left(\frac{x^2}{2}\right)}_{dv} = \underbrace{e^x}_{u}\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v}\underbrace{d(e^x)}_{du} = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x\,dx.$$

এই অব্দি কোনো সমস্যা নেই। কিন্তু এবার ওই শেষের integral-টা নিয়েই মুশকিল। গোড়ার যে integral-টা কষবার চেষ্টায় এত কাণ্ড শুরু করেছিলাম, এই শেষের integral-টা তো তার চাইতেও কঠিন মনে হচ্ছে! তবে আর by parts করে লাভটা কী হল? ■

ওই যে বলেছিলাম by parts হল ব্যবসাতে কিছু টাকা খাটিয়ে আরো টাকা করার মত। যত টাকা খাটাচ্ছ, তার থেকে বেশী টাকা যদি উসুল না হয়, তবে ব্যবসা করার মানে থাকে না।

Example 5: If $\int x^5 e^{-4x^3}\,dx = \frac{1}{48}e^{-4x^3}f(x) + c$, where c is a constant of integration, then $f(x)$ is equal to

(A) $-4x^3 - 1$

(B) $4x^3 + 1$

(C) $-2x^3 - 1$

(D) $-2x^3 + 1$

(JEE(main)2019)

SOLUTION: এখানে প্রথমেই চোখে পড়ছে e^{-4x^3}-এর ভিতরের x^3-টা, যার derivative হল $3x^2$. বাইরের x^5 থেকে একটা x^2 সরিয়ে রাখলে ফের x^3-ই পড়ে থাকছে। সুতরাং x^3-এর জায়গায় কোনো variable বসানোর আদর্শ সুযোগ--

$$\int x^5 e^{-4x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int x^3 e^{-4x^3}\,d(x^3)$$

$$= \frac{1}{3}\int ue^{-4u}\,du \quad \left[\text{substituting } u = x^3\right]$$

এইবার integration by parts লাগাব।

শেষের $e^{-4u}\,du$-টাকে $-\frac{1}{4}d\big(e^{-4u}\big)$ বলে চেনা যাচ্ছে।

$$= -\frac{1}{12}\int u\,d\big(e^{-4u}\big)$$

$$= -\frac{1}{12}\left[ue^{-4u} - \int e^{-4u}\,du\right] \quad [\text{by parts}]$$

$$= -\frac{1}{12}\left[ue^{-4u} + \frac{1}{4}e^{-4u}\right] + c,$$

যেখানে c-টা হল arbitrary constant. এবার u থেকে x-এ ফিরতে হবে। এখানে ওই arbitrary constant-টা বাদে বাকিটা হল $-\frac{e^{-4u}}{12}\left[u + \frac{1}{4}\right]$. এর মধ্যে $u = x^3$ বসালে হবে

$$-\frac{e^{-4x^3}}{12}\left[x^3 + \frac{1}{4}\right] = -\frac{e^{-4x^3}}{48}(4x^3 + 1)$$

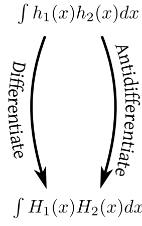


Fig 1

অতএব উত্তর হবে (A). ■

এবার তোমার নিজে নিজে করার জন্য একগুচ্ছ অংক।

Exercise 5:
(*i*) $\int \cot^{-1} x\, dx$ (*ii*) $\int \tan^{-1} x\, dx$ (*iii*) $\int x^2 e^x\, dx$ (*iv*) $\int x^2 \log x\, dx$ (*v*) $\int x^3 \log x\, dx$
■

16.2 যদি $v(x)$-কে সহজে চেনা না যায়

আমরা integration by parts করার সময়ে এই সূত্রটা ব্যবহার করি--

$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx.$$

আমরা এতক্ষণ যে সব অংক দেখছিলাম, সেখানে $v(x)$-টাকে সহজে চেনা যাচ্ছিল। কিন্তু সেটা না চেনা গেলেও integration by parts লাগানো সম্ভব। এবার সেটাই আলোচনা করব। এরকম ক্ষেত্রে বার কয়েক এদিক ওদিক ঢুঁ মারা ছাড়া গত্যন্তর থাকে না। কায়দাটা বোঝার জন্য Fig 1-এর দিকে চোখ রেখে পড়তে থাকো।

ধরো $\int h(x)dx$ বার করার কথা। এর জন্য তোমাকে একটু রাফ করে নিতে হবে। প্রথমে রাফে integrand-টাকে দুটো function-এর গুণফল হিসেবে লিখে নাও, $h(x) = h_1(x) \times h_2(x)$. এবার $h_1(x)$-কে differentiate করে $H_1(x)$ বানাও, আর $h_2(x)$-কে antidifferentiate করে বানাও $H_2(x)$. এবার দ্যাখো $\int H_1(x)H_2(x)\, dx$-টা বার করা সহজ হচ্ছে কিনা।

- যদি না হয়, তবে এই $h_1(x), h_2(x)$ দিয়ে কাজ হবে না। অন্যভাবে $h(x)$-কে ভাঙতে হবে।
- যদি $\int H_1(x)H_2(x)\, dx$-টা সহজে বার করতে পারো, তবে by parts লাগিয়ে $\int h(x)\, dx$ বার করা যাবে। তার জন্য $u(x) = h_1(x)$ আর $v(x) = H_2(x)$ নিলেই চলবে। কারণ সেক্ষেত্রে

$$\int h(x)\, dx = \int h_1(x)h_2(x)\, dx = \int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx,$$

  যেখানে $\int u'(x)v(x)\, dx = \int H_1(x)H_2(x)\, dx$ বার করা যাচ্ছে।

পুরো জিনিসটা দেখে মাথা গুলিয়ে যাওয়া স্বাভাবিক। একটা সহজ উদাহরণ দেখি। এই উদাহরণটা এতই সহজ যে, আগের কায়দাতেই করে ফেলা যায়। কিন্তু তাও আমরা নতুন কায়দাটা লাগানোর চেষ্টা করব।

Example 6: $\int x \sin x \, dx = ?$

SOLUTION: প্রথমে দেখি $h_1(x) = \sin x$ আর $h_2(x) = x$ নিয়ে কী হয়। এই কাজটা রাফে করছি--

$\int \sin(x) \times x dx$

Differentiate | Antidifferentiate

$\int \cos(x) \times \frac{x^2}{2} dx$

আমরা $h_1(x) = \sin x$-কে differentiate করে পেলাম $H_1(x) = \cos x$, আর $h_2(x) = x$-এর একটা antiderivative নিলাম $H_2(x) = \frac{1}{2}x^2$. এবার দেখতে হবে এদের গুণফলটাকে সহজে integrate করা যায় কিনা, মানে $\frac{1}{2}\int x^2 \cos x \, dx$ বার করা সহজ কিনা। নাঃ, এই integral-টা মোটেই উপাদেয় ঠেকছে না। অতএব এই রাফটা রাফেই থাক, আমরা বরং আরেকভাবে ভাঙার চেষ্টা করি--

$\int x \times \sin(x) dx$

Differentiate | Antidifferentiate

$\int 1 \times (-\cos x) dx$

এবার $h_1(x) = x$ আর $h_2(x) = \sin x$ নিয়েছি। তাহলে $h_1(x)$-এর derivative পাচ্ছি $H_1(x) = 1$, আর $\sin x$-এর একটা antiderivative নিয়েছি $H_2(x) = -\cos x$. দেখতে হবে $\int H_1(x)H_2(x) \, dx = -\int \cos x \, dx$ সহজে বার করা যাচ্ছে কিনা। হ্যাঁ, এই integral-টা সহজেই করা যাবে বটে। সুতরাং এবারের রাফটা গুছিয়ে লিখে ফেলা যাক। তার জন্য $u(x) = h_1(x) = x$ আর $v(x) = H_2(x) = -\cos x$ নেব--

$\int x \sin x \, dx = \int u(x)v'(x) \, dx$, where $u(x) = x$ and $v(x) = -\cos x$.
Using integration by parts,

$$\begin{aligned}
\int u(x)v'(x) \, dx &= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) \, dx \\
&= x(-\cos x) - \int (-\cos x) \, dx \quad [\because u'(x) = 1] \\
&= -x\cos x + \int \cos x \, dx \\
&= -x\cos x + \sin x + c,
\end{aligned}$$

where c is an arbitrary constant.



একইরকম আরেকটা উদাহরণ দেখি।

Exercise 6: $\int x\tan^{-1}x\,dx = ?$

HINT: এটাকে দুটো জিনিসের গুণফল হিসেবে লিখতে হলে প্রথমেই মনে হয় $x \times \tan^{-1}x$ আকারে লেখা। এদের মধ্যে একটাকে differentiate করতে হবে, আর অন্যটার antiderivative বার করতে হবে। তা, $\tan^{-1}x$-এর antiderivative বার করতে খুব মজা নেই। তার চেয়ে বরং $\tan^{-1}x$-কে differentiate, আর x-কে antidifferentiate করি। তাহলে পাব $\frac{1}{1+x^2}$ আর $\frac{1}{2}x^2$. এদের গুণফলকে integrate করা মানে $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$ বার করা (ওই $\frac{1}{2}$-টার জন্য কিছু আটকাচ্ছে না, আমরা তো খালি রাফে ভেবে দেখছি কাজটা করা যাবে কিনা)। যদি $\frac{x^2}{1+x^2}$-কে $1-\frac{1}{1+x^2}$ আকারে লিখে নিই, তবেই integral-টা বেরিয়ে যাবে, কারণ জানি যে, $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x + c$.

ব্যস্, রাফ শেষ। এবার গুছিয়ে লেখার পালা। যেটাকে differentiate করেছি সেটা হল $u(x)$, আর অন্যটার antiderivative হল $v(x)$. তার মানে--

> Let $u(x) = \tan^{-1}x$ and $v(x) = \frac{1}{2}x^2$.
> Then
> $$\begin{aligned}\int x\tan^{-1}x\,dx &= \int u(x)v'(x)\,dx \\ &= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx \quad [\text{by parts}] \\ &= \frac{1}{2}x^2 \times \tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2} \quad \left[\because \tfrac{d}{dx}\tan^{-1}x = \tfrac{1}{1+x^2}\right] \\ &= \cdots.\end{aligned}$$

শেষ কয়টা ধাপ লিখে ফেলার দায়িত্ব তোমাকেই দিলাম।



তোমার হাত পাকানোর জন্য আরো কিছু অংক।

Exercise 7:

1. $\int x^2\tan^{-1}x\,dx.$
2. $\int x\sin^{-1}x\,dx.$
3. $\int t\cosh t\,dt.$



16.3 Definite integral

Definite integral বার করার একটা কায়দা হল প্রথমে indefinite integral হিসেবে বার করে তারপরে দুই প্রান্তের সংখ্যা দুটো বসানো। Substitution শেখার সময়ে আমরা দেখেছিলাম যে, এই দুটো কাজ একসঙ্গে সংক্ষেপে সেরে ফেলা যায়। Integration by parts-এর বেলাতেও সেরকম একটা কায়দা আছে। এবার সেটাই শিখব।

Example 7: $\int_1^2 xe^x\,dx = ?$

SOLUTION: যদি প্রথমে indefinite integral-টা বার করে তারপরে দুই প্রান্তের সংখ্যাদুটো বসাতাম, তবে প্রথমে $\int xe^x\,dx$ বার করতে হত। সেটা হয়ে যাওয়ার পর দুই প্রান্তের 1 আর 2 বসানোর প্রশ্ন আসত। কিন্তু পুরোটাই সংক্ষেপে একসঙ্গে করে ফেলা যায়, এইভাবে--

$$\int_1^2 xe^x\,dx = \int_{x=1}^2 x\,d(e^x)$$

লক্ষ করো, যেই d-এর পরে x ছাড়া অন্য কিছু থাকছে, অমনি নীচের প্রান্তে খালি 1 না লিখে $x=1$ লিখেছি। উপরের প্রান্তে আর আলাদা করে $x=2$ লিখি নি, ওটা নীচের প্রান্তটা দেখলে বোঝাই যাচ্ছে।

$$= xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x\,dx \quad [\text{by parts}]$$

$$= 2e^2 - e - e^x\Big|_1^2 = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2.$$

■

নীচের অংক কয়টা কষে এইভাবে সংক্ষেপে লেখাটা অভ্যাস করে নাও।

Exercise 8:

1. $\int_0^1 \cot^{-1} x\,dx$
2. $\int_0^1 x\tan^{-1} x\,dx$
3. $\int_1^2 (x+1)^2 e^{-x}\,dx$

■

Exercise 9: Let $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be a thrice differentiable function. Suppose that $F(1)=0$, $F(3)=-4$ and $F'(x)<0$ for all $x\in(1/2,3)$. Let $f(x)=xF(x)$ for all $x\in\mathbb{R}$. If $\int_1^3 x^2F'(x)\,dx=-12$ and $\int_1^3 x^3F''(x)\,dx=40$, then the correct expression(s) is(are)

(A) $9f'(3)+f'(1)-32=0$

(B) $\int_1^3 f(x)\,dx=12$

(C) $9f'(3)-f'(1)+32=0$

(D) $\int_1^3 f(x)\,dx=-12$

(JEE(adv)2015.II60)

HINT: এখানে (A) আর (C)-এর জন্য $f'(x)$ বার করে নিলে সুবিধা হবে। সেটা হল $f'(x)=F(x)+xF'(x)$. এখানে (A)-র জন্য আমাদের লাগবে

$$9f'(3)+f'(1)=\cdots=27F'(3)+F'(1)+9F(3)+F(1).$$

একইভাবে (C)-র জন্য দরকার

$$9f'(3)-f'(1)=\cdots=27F'(3)-F'(1)+9F(3)-F(1).$$

এদের মধ্যে $F(1)$ আর $F(3)$ দেওয়াই আছে। কিন্তু $F'(1)$ আর $F'(3)$ সরাসরি দেওয়া নেই।
লক্ষ করো, $\int_1^3 x^2 F'(x)\,dx$ আর $\int_1^3 x^3 F''(x)\,dx$ দুজনেই বেশ integration by parts করার জন্য তৈরীই আছে--

$$\begin{aligned}\int_1^3 x^2 F'(x)\,dx &= \int_{x=1}^3 x^2\, d(F(x)) \\ &= x^2 F(x)\Big|_1^3 - \int_{x=1}^3 F'(x)\, d(x^2) \quad [\text{by parts}] \\ &= 9F(3) - F(1) - 2\int_1^3 xF(x)\,dx\end{aligned}$$

এবার $F(1)$, $F(3)$-এর value বসানো যাক। আর $f(x) = xF(x)$ বলা আছে--

$$= -36 - 2\int_1^3 f(x)\,dx$$

এ থেকেই (B) আর (D)-এর মধ্যে কে ভুল কে ঠিক পেয়ে যাচ্ছি। এবার অন্য by parts-টা দেখি--

$$\begin{aligned}\int_1^3 x^3 F''(x)\,dx &= \int_{x=1}^3 x^3\, d(F'(x)) \\ &= x^3 F'(x)\Big|_1^3 - \int_{x=1}^3 F'(x)\, d(x^3) \\ &= 27F'(3) - F'(1) - 3\int_{x=1}^3 x^2 F'(x)\,dx.\end{aligned}$$

অতএব--

$$40 = 27F'(3) - F'(1) - 3(-12),$$

অর্থাৎ $27F'(3) - F'(1) = 4$. বাঃ, (C)-এর জন্য তো ঠিক এটাই দরকার ছিল। একটু যোগবিয়োগ করলেই বুঝবে যে (C)-টা ঠিক।
পড়ে আছে খালি (A)-র চরিত্রনির্ধারণ। সেটা নিজেই চেষ্টা করে দেখবে নাকি? না পারলে উত্তর দেখে নিও। ■

Example 8: Let $f(x) = 7\tan^8 x + 7\tan^6 x - 3\tan^4 x - 3\tan^2 x$ for all $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Then the correct expression(s) is(are)

(A) $\int_0^{\pi/4} xf(x)\,dx = \frac{1}{12}$

(B) $\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx = 0$

(C) $\int_0^{\pi/4} xf(x)\,dx = \frac{1}{6}$

(D) $\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx = 1$

(JEE(adv)2015.II55)
SOLUTION: এই অংকটায় প্রথমেই যেটা চোখে পড়ে সেটা হল $f(x)$-কে দুটো factor-এ ভেঙে লেখা যায়--

$$7\tan^8 x + 7\tan^6 x - 3\tan^4 x - 3\tan^2 x = 7\tan^6(\tan^2 x+1) - 3\tan^2 x(\tan^2 x+1) = (7\tan^6 x - 3\tan^2 x)\sec^2 x.$$

এবার option-গুলোর দিকে তাকাও। (A) আর (C) একইরকম, ওদের জন্য $\int_0^{\pi/4} xf(x)\,dx$ বার করতে হবে। আবার (B) আর (D)-ও একইরকম, ওদের জন্য লাগছে $\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx$. এর মধ্যে $\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx$-টাই সহজতর বলে মনে হচ্ছে, সেটা দিয়েই শুরু করি--

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx &= \int_0^{\pi/4} (7\tan^6 x - 3\tan^2 x)\sec^2 x\,dx \\
&= \int_0^1 7u^6 - 3u^2\,du \quad \left[\text{substituting } u = \tan x\right] \\
&\quad \text{এই substitution-টা করা গেল,} \\
&\quad \text{কারণ } \tan : \left[0, \tfrac{\pi}{4}\right] \to [0,1] \text{ একটা one-one, onto function.} \\
&= 1 - 1 = 0.
\end{aligned}$$

অতএব (B) ঠিক, (D) ভুল।
এবার অন্য integral-টার পালা--

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} x\,f(x)\,dx &= \int_0^{\pi/4} x(7\tan^6 x - 3\tan^2 x)\sec^2 x\,dx \\
&\quad \text{আবার সেই একই substitution করব } u = \tan x. \\
&= \int_0^1 \tan^{-1} u(7u^6 - 3u^2)\,du \\
&\quad \text{লক্ষ করো, আমরা } x\text{-এর জায়গায় } \tan^{-1} x \text{ লিখেছি,} \\
&\quad \text{কারণ } x \in \left(0, \tfrac{\pi}{4}\right) \subseteq \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \text{ নিয়ে কাজ হচ্ছে।} \\
&\quad \text{এবার integration by parts লাগানোর দিকে এগোব--} \\
&= \int_{u=0}^1 \tan^{-1} u\,d(u^7 - u^3) \\
&= (u^7 - u^3)\tan^{-1} u\Big|_0^1 - \int_{u=0}^1 (u^7 - u^3)\,d(\tan^{-1} u) \quad [\text{by parts}] \\
&= -\int_0^1 \frac{u^7 - u^3}{1 + u^2}\,du \\
&= \cdots \\
&= -\int_0^1 u^3(u^2 - 1)\,du = \cdots = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

অতএব (A) ঠিক, আর (C) ভুল। ■

DAY 17
কিছু কৌশল

17.1 ধাপে ধাপে নামার কৌশল

Integration by parts করে আমরা একটা integral-কে আরেকটা integral-এ পরিণত করতে পারি, এবং আশা করি যে নতুন integral-টা কষে ফেলা যাবে। কখনো কখনো এমন হয় যে, নতুন integral-টা সহজতর হলেও পুরোপুরি কষে

ফেলা যায় না। তখন হয়তো তার উপর আবার integration by parts লাগিয়ে আরো সহজ করে তোলা যায়। এরকম ধাপে ধাপে সহজ করার একটা উদাহরণ দেখাই এবার।

Example 9: $\int x^3 e^x dx = ?$

SOLUTION: এখানে যদি integration by parts করি এইভাবে--

$\int x^3 e^x \, dx$

differentiate ↓ ↓ antidiff

$\int 3x^2 e^x \, dx$

তবে কাজটা পরিণত হবে $\int x^2 e^x \, dx$ বার করাতে, যেটা সহজতর, কারণ x-এর মাথার উপরে এখন 3-টা কমে 2 হয়েছে। সুতরাং ফের integration by parts করলে 2-টা কমে 1, এবং অবশেষে 0 হয়ে গেলে integral-টা খালি $\int e^x \, dx$ বার করাতে পর্যবসিত হবে, যেটা সরাসরি করে ফেলতে পারব। একইরকম integration by parts বারবার না করে, আমরা কাজটা একবারেই সেরে রাখব, একটা general চেহারা নিয়ে--

$$\begin{aligned} \int x^n e^x dx &= \int x^n d(e^x) \\ &= x^n e^x - \int e^x d(x^n) \quad [\text{by parts}] \\ &= x^n e^x - n \int e^x x^{n-1} dx. \end{aligned}$$

লক্ষ করো শেষমেশ যে integral-টাতে এসে পড়লাম, সেটাও গোড়ার integral-টার মতই, তবে n-এর জায়গায় $n-1$, তাই একটু সহজতর। যদি গোড়ার integral-টাকে I_n বলি, তবে এই integral-টা হবে I_{n-1}. অতএব পাচ্ছি--

$$I_n = x^n e^x - nI_{n-1}. \qquad (*)$$

আমাদের বার করতে বলেছিল I_3. যদি $n = 3$ থেকে শুরু করে বারবার (*) লাগিয়ে n কমাতে থাকি তবে পাব--

$$\begin{aligned} I_3 &= x^3 e^x - 3I_2 \\ &= x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2I_1) \\ &= (x^3 - 3x^2)e^x + 6I_1 \\ &= (x^3 - 3x^2)e^x + 6(xe^x - I_0) \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x)e^x - 6I_0 \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x)e^x - 6\int e^x \, dx \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x)e^x - 6e^x + c, \end{aligned}$$

যেখানে c একটা arbitrary constant. এখানে আমরা (*)-কে বারবার ব্যবহার করছিলাম। এরকম ফর্মুলাকে অনেক সময়ে বলে একটা **reduction formula.** ■

Exercise 10:

1. $\int x^4 \cos x\, dx = ?$ এখানে $I_n = \int x^n \cos x\, dx$ নিলে I_n-কে I_{n-2} দিয়ে প্রকাশ করতে পারবে।

2. দেখাও যে, যেকোনো $n \in \mathbb{N}$-এর জন্যই $\lim_{t\to\infty} \int_0^t x^n e^{-x}\, dx = n!$ হয়।

■

পরের অংকটা একটা reduction formula বার করা নিয়েই।

Example 10: Let $I_n = \int \tan^n x\, dx$ $(n > 1)$. If

$$I_4 + I_6 = a \tan^5 x + bx^5 + C,$$

where C is a constant of integration, then the ordered pair (a, b) is equal to

(A) $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$

(B) $\left(-\frac{1}{5}, 1\right)$

(C) $\left(\frac{1}{5}, 0\right)$

(D) $\left(\frac{1}{5}, -1\right)$

(JEE(main)2017)

SOLUTION: এখানে ordered pair বলে একটা ভাষা ব্যবহার করা হয়েছে। যদি বলি ordered pair হিসেবে $(a, b) = (2, 3)$, তার মানে হল $a = 2$ আর $b = 3$. ব্যস্! যদি বলতাম unordered pair হিসেবে $\{a, b\} = \{2, 3\}$ তবে $a = 2, b = 3$-ও হতে পারত, আবার $a = 3, b = 2$-ও চলত। সাধারণতঃ ordered pair বোঝাতে গোল ব্র্যাকেট আর unordered pair বোঝাতে ঢেউ খেলানো ব্র্যাকেট ব্যবহার করা হয়। যাই হোক, এবার অংকটার প্রসঙ্গে আসা যাক।

$$\begin{aligned} I_6 &= \int \tan^6 x\, dx \\ &= \int \tan^4 x (\sec^2 x - 1)\, dx \\ &= \int \tan^4 x \sec^2 x\, dx - \int \tan^4 x\, dx \end{aligned}$$

এর মধ্যে দ্বিতীয়টাকে তো I_4 বলে চিনতেই পারছ। প্রথমটাকে substitution দিয়ে ঘায়েল করব।

$$\begin{aligned} &= \int \tan^4 x\, d(\tan x) - I_4 \\ &= \frac{1}{5} \tan^5 x + C - I_4. \end{aligned}$$

এইটা কী করে পেলাম বুঝলে তো? মনে মনে $t = \tan x$ বসিয়ে দিলে ওই $\int \tan^4 x\, d(\tan x)$-টা হয়ে যায় $\int t^4\, dt$. সেখান থেকে $\frac{1}{5}t^5 + C$, এবং সেখানে $t = \tan x$ ব্যবহার করে x-কে ফিরিয়ে আনা।
লক্ষ করো, এ থেকে পেলাম

$$I_6 + I_4 = \frac{1}{5} \tan^5 x + C.$$

কিন্তু প্রশ্নে যে চেহারাটা দিয়েছিল সেখানে আবার ডানদিকে একটা x^5-ওয়ালা term-ও ছিল। সেটা যে এল না? কুছ্ পরোয়া নেই, এইভাবে লিখে নিলেই হল--

So

$$I_6 + I_4 = \frac{1}{5}\tan^5 x + 0 \times x^5 + C.$$

অতএব $a = \frac{1}{5}$ আর $b = 0$ হচ্ছে, মানে (C) হচ্ছে। ■

17.2 আমড়াতলার মোড়ে পৌঁছোনোর কৌশল

এবার আমরা একটা নতুন কৌশল শিখব। ব্যাপারটা একটু অদ্ভুত। আমরা এক্ষুণি শিখলাম যে, integration by parts একবার করাই যথেষ্ট নাও হতে পারে। কোনো কোনো সময়ে বারবার করে integration by parts করে কাজটাকে ধাপে ধাপে সহজ করে তুলতে হয়।

তারপরেতে হঠাৎ বেঁকে ডাইনে মোচড় মেরে
ফিরবে আবার বাঁয়ের দিকে, তিনটে গলি ছেড়ে।
তবেই আবার পড়বে এসে আমড়াতলার মোড়ে--
তারপরে যাও যেথায় খুশি, জ্বালিয়োনাকো মোরে।

--সুকুমার রায়

অনেক সময়ে কিন্তু দেখা যায় যে, নতুন integral-টার উপর আরেকবার integration by parts লাগালে সহজতর না হয়ে ফের মূল integral-টাই ফিরে আসে। এরকম ক্ষেত্রে মনে হতে পারে যে integration by parts করার পুরো পরিশ্রমটাই জলে গেল। সুকুমার রায়ের সেই কবিতাটার মত আমড়াতলার মোড় থেকে অনেক পথ ঘুরে শেষে ফের আমড়াতলার মোড়েই ফিরে আসার মত। কিন্তু এরকম অবস্থাতেও কখনো কখনো কৌশল করে integral-টা বার করে ফেলা যায়। একটা উদাহরণ না দেখলে ব্যাপারটা বোঝা মুশকিল।

Example 11: $\int e^x \sin x\, dx = ?$

SOLUTION: প্রথমে একবার integration by parts লাগিয়ে শুরু করা যাক--

$$\begin{aligned}
\int e^x \sin x\, dx &= \int e^x\, d(-\cos x) \\
&= -e^x \cos x + \int \cos x\, d(e^x) \\
&= -e^x \cos x + \int \cos x e^x\, dx
\end{aligned}$$

নতুন integral-টা তো মূল integral-টার মতই কঠিন!

ঠিক আছে, ফের একবার integration by parts লাগানোর চেষ্টা করা যাক--

$$\begin{aligned}
&= -e^x \cos x + \int e^x\, d(\sin x) \\
&= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int \sin x\, d(e^x) \\
&= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx,
\end{aligned}$$

ও হরি, সেই গোড়ার integral-টাই ফিরে এল যে! তবে কি বৃথাই জঙ্গলের মধ্যে পথ হারিয়ে ঘুরপাক খাচ্ছি? না, কারণ যদি গোড়ার integral-টাকে I নাম দিই, তবে আমরা পেয়ে গেছি--

$$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$$

তাই $2I = -e^x \cos x + e^x \sin x$, মানে

$$I = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}.$$



নীচের integral-গুলো একইভাবে বার করতে পারবে।

Exercise 11:

1. $\int e^x \cos x \, dx$
2. $\int e^{-x} \sin x \, dx$
3. $\int e^{2x} \sin 3x \, dx$
4. $\int \cos(\log x) \, dx$
5. $\int \sin(\log x) \, dx$



এখানে $\int \cos(\log x) \, dx$ কষতে দিয়েছে। তার জন্য খানিকটা খাটতে হবে। কিন্তু নীচের অংকটায় সেই একই integral-কে MCQ ঠাকুরের কৃপায় শর্টকাটে "মেরে" দেওয়া যায়।

Example 12: The integral $\int \cos(\log_e x) \, dx$ is equal to (where c is a constant of integration)

(A) $\frac{x}{2}\big(\sin(\log_e x) - \cos(\log_e x)\big) + c$

(B) $\frac{x}{2}\big(\cos(\log_e x) + \sin(\log_e x)\big) + c$

(C) $x\big(\cos(\log_e x) + \sin(\log_e x)\big) + c$

(D) $x\big(\cos(\log_e x) - \sin(\log_e x)\big) + c$

(JEE(main)2019)

SOLUTION:মনে রেখো $\int f(x) \, dx = g(x) + c$ দেখানো, আর $g'(x) = f(x)$ দেখানো একই কথা। যেহেতু integrate করার চেয়ে differentiate করা সাধারণতঃ সহজতর, তাই এই অংকে option-গুলোকে differentiate করে দেখতেই সুবিধা বেশী। সবগুলো option-ই $x \sin \log x$ আর $x \cos \log x$ দিয়ে তৈরী। প্রথমে ওদেরকে differentiate করে রাখো--

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x \sin \log x) &= \sin \log x + \cos \log x \\
\frac{d}{dx}(x \cos \log x) &= -\sin \log x + \cos \log x.
\end{aligned}
$$

এদের ব্যবহার করে সবগুলো option-এরই derivative বেরিয়ে যাবে। যেটার বা যেগুলোর বেলায় $\cos \log x$ আসবে সেই option-এ পেন্সিল বোলালেই হবে। ■

এইবারে আরেকটা অংক দিই, এখানেও আমড়াতলার মোড়ে আসার ব্যাপারটা আছে, তবে অন্যভাবে।

Exercise 12: $\int (\cot x - x \operatorname{cosec}^2 x) dx = ?$

HINT: অবশ্যই এটাকে তুমি $\int \cot x \, dx$ আর $\int x \operatorname{cosec}^2 x \, dx$-এ ভেঙে দুটো integral-কেই আলাদা করে করতে পারো। কিন্তু যদি প্রথমে খালি $\int x \operatorname{cosec}^2 x \, dx$-এর উপরে integration by parts লাগাও, তবে দেখবে $\cot x \, dx$ আর বার করতেই হবে না! ■

নীচের অংকটাতেও সেই ব্যাপারটা আছে।

Example 13: If

$$\alpha = \int_0^1 (e^{9x+3\tan^{-1}x})\left(\frac{12+9x^2}{1+x^2}\right)dx$$

where $\tan^{-1}x$ takes only principal values, then the value of $\left(\log_e|1+\alpha| - \frac{3\pi}{4}\right)$ is ... **(JEE(adv)2015.II46)**

SOLUTION: এখানে principal value বলে একটা ভাষা ব্যবহার করেছে। আসলে $\tan x$ মোটেই one-one function নয়। তাই তার inverse-ও হয় না। সেই কারণে $\tan^{-1}x$ লেখার সময়ে আমরা একটা বাড়তি শর্ত চাপিয়ে নিই যে $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ হতে হবে, কারণ $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ সত্যিই one-one হয়। এই $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-এর মধ্যের সংখ্যাগুলোকেই এখানে principal value বলা হয়েছে। যদি সেটা নাও বলে দিত, তাও আমরা প্রচলিত নিয়ম অনুসারে সেটাই ধরে নিতাম।

$$\begin{aligned}\alpha &= \int_0^1 e^{9x+3\tan^{-1}x}\left(\frac{12+9x^2}{1+x^2}\right)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{9\tan u+3u}(12+9\tan^2 u)\,du \quad \left[\text{Substituting } u=\tan^{-1}x\right]\end{aligned}$$

এর ফলে $du = \frac{dx}{1+x^2}$ হচ্ছে। আর integral-এর দুই প্রান্তের 0 আর 1 হয়ে যাচ্ছে 0 আর $\frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{9\tan u+3u}(3+9\sec^2 u)\,du \\ &= 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{9\tan u+3u}\,du + 9\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{9\tan u+3u}\sec^2 u\,du.\end{aligned}$$

Now

$$\begin{aligned} 9\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{9\tan u+3u}\sec^2 u\,du &= 9\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3u}e^{9\tan u}\sec^2 u\,du \\ &= \int_{u=0}^{\frac{\pi}{4}} e^{3u}d\big(e^{9\tan u}\big) \\ &= e^{3u}e^{9\tan u}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_{u=0}^{\frac{\pi}{4}} e^{9\tan u}d\big(e^{3u}\big) \\ &= e^{\frac{3\pi}{4}+9} - 1 - 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{9\tan u+3u}\,du \end{aligned}$$

Thus,

$$\alpha = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{9\tan u+3u}\,du + 9\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{9\tan u+3u}\sec^2 u\,du = e^{\frac{3\pi}{4}+9} - 1.$$

So $\log_e|1+\alpha| - \frac{3\pi}{4} = 9.$

■

17.2.1 আমড়াতলা ও substitution

Substitution আর integration by parts, এই দুটো কায়দারই মূল উদ্দেশ্যটা এক--একটা integral-কে আরেকটা integral-এর পরিণত করা। তারপর--

- নতুন integral-টা কষে ফেলা গেলে সবচেয়ে ভালো,
- যদি তা না হয়ে অন্ততঃ খানিকটা সহজ হয়, তাহলেও reduction formula বার করার চেষ্টা করা যায়।
- সেটাও যদি না হয়, তাও সুবিধা করা যেতে পারে যদি আমড়াতলার মোড়ে ফিরে আসা হয়।

এই আমড়াতলার মোড়ে ফিরে আসার ব্যাপারটা integration by parts-এর বেলায় যেমন হতে পারে, তেমনি substitution-এর বেলাতেও পারে। এরকম দুটো উদাহরণ দেখব এবার।

Exercise 13: If

$$I = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(1+e^{\sin x})(2-\cos 2x)},$$

then $27I^2$ equals... **(JEE(adv)2019.I17)**

HINT:

একটা definite integral করতে হলেই আমাদের প্রথম চেষ্টা থাকে প্রান্ত দুটোর কথা ভুলে আগে indefinite integral-টাকে বার করার। তা, এখানে খানিকক্ষণ সে চেষ্টা করে দ্যাখো। খুব একটা সুবিধা করতে পারবে বলে মনে হয় না। অগত্যা বাধ্য হয়েই সরাসরি definite integral-টাকে আক্রমণ করার চেষ্টা করা যাক। দ্বিতীয় অধ্যায়ে আমরা একটা কার্ডবোর্ড ওল্টানোর কায়দা শিখেছিলাম (Fig 2)--

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

সেটা লাগানোর চেষ্টা করে দেখলে হয়। এখানে $a=-\frac{\pi}{2}$ আর $b=\frac{\pi}{2}$, অতএব $a+b-x=-x$. তাই integrand-এর মধ্যে x-এর জায়গায় $-x$ বসালেই হবে (integration-এর দুই প্রান্ত আর dx-এ হাত না দিয়ে)--

$\because \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$, we have

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(1+e^{\sin x})(2-\cos 2x)} \\ &\quad \text{মনে রেখো, } \sin(-x) = -\sin x \text{ আর } \cos(-x)=\cos x. \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(1+e^{-\sin x})(2-\cos 2x)} \\ &\quad \text{এবার উপর নীচ দু দিককেই } e^{\sin x} \text{ দিয়ে গুণ করব।} \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\sin x}\,dx}{(1+e^{\sin x})(2-\cos 2x)}. \end{aligned}$$

মনে হতে পারে যে, এতে আর লাভ কী হল? সেই তো গোড়ার integral-টার মতই আরেকটা কিছু পেলাম। কিন্তু না, যদি গোড়ার integral-টার সঙ্গে একে যোগ করে দাও, তবে ঘ্যাঁচ্‌ঘ্যাঁচ্‌ করে বেশ খানিকটা কাটাকাটি হয়ে যাবে--

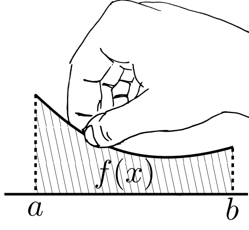


Fig 2

Now

$$\begin{aligned} I+I &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(1+e^{\sin x})(2-\cos 2x)} + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\sin x}\,dx}{(1+e^{\sin x})(2-\cos 2x)} \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2-\cos 2x} \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}} \quad \left[\text{substituting } t=\tan x\right] \end{aligned}$$

এটা আমাদের পরিচিত $\tan\frac{x}{2}$ বসানোর কায়দাটাই,
খালি এখানে $\cos 2x$ নিয়েই কাজ হচ্ছিল, তাই $\tan\frac{x}{2}$-এর বদলে $\tan x$-এই কাজ হবে।

$$= \int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+3t^2}$$

ব্যস্, আমাদের পরিচিত চেহারায় চলে এসেছে। খালি একটা $\frac{1}{3}$ বাইরে বার করে আনলেই হল! বাকি কাজটুকু তোমার জন্য রেখে দিলাম। ■

Example 14: Let f be a differentiable function such that $f(f(x)) = x$ for $x \in [0,1]$. Suppose $f(0) = 1$. Determine the value of $\int_0^1 (x - f(x))^{2016}\,dx$. **(ISI(2016).7)**
SOLUTION: অংকটা মোটেই সহজ নয়। কিন্তু এটার একটা দুর্বলতা আছে, যার সুযোগে তুমি উত্তরটা আন্দাজ করে ফেলতে পারো। এখানে $f(x)$ কী বলে দেয় নি, খালি বলেছে f-টা এই বিশেষ শর্তগুলো পালন করে--

- differentiable,
- $x \in [0,1]$ হলে $f(f(x)) = x$ হয়,
- এবং $f(0) = 1$.

এখানে f-টা পুরো বলে না দিলেও প্রশ্নের ভাষা থেকে বোঝা যাচ্ছে যে, উত্তরটা হবে একই সংখ্যা। সুতরাং পরীক্ষায় যখন অংকটা দিয়েছে, তখন নিশ্চয়ই এরকম যেকোনো function-এর বেলাতেই $\int_0^1 (x-f(x))^{2016}\,dx$ একই সংখ্যা হবে। অতএব যদি একটা সহজ f ভেবে ফেলতে পারো, যেটা ওই শর্তগুলো পালন করে, তবে তার জন্য $\int_0^1 (x - f(x))^{2016}\,dx$ বার করলেই হবে, সেটাই যেকোনো এরকম f-এর জন্য উত্তর হতে বাধ্য।

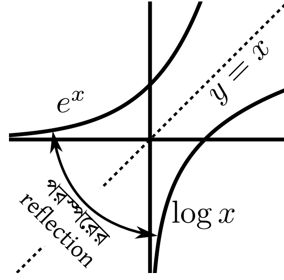


Fig 3

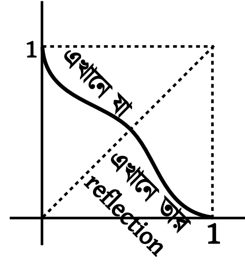


Fig 4

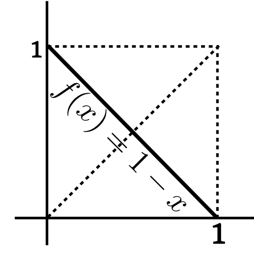


Fig 5

অবশ্য এরকম সহজ একটা f-ই বা পাচ্ছি কোথায়? যারা function-এর গ্রাফ নিয়ে চিন্তা করতে ভালোবাসো, তাদের কাছে কাজটা কঠিন নয় মোটেই। প্রথম আর তৃতীয় শর্ত নিয়ে কোনো সমস্যা নেই, দ্বিতীয় শর্তটার মানে হল f নিজেই নিজের inverse[1] হচ্ছে। কোনো f-এর গ্রাফ আর f^{-1}-এর গ্রাফ যে $y = x$ লাইন বরাবর পরস্পরের reflection (প্রতিফলন) হয়, সেটা কি জানো? যেমন, e^x আর $\log x$-এর গ্রাফ (Fig 3)। তার মানে নিজেই নিজের inverse হওয়ার জন্য গ্রাফটা এমন হতে হবে যেন $y = x$ লাইন বরাবর reflect করলেও বদলাবে না, অর্থাৎ ওই লাইনকে কেন্দ্র করে symmetric হবে। আমরা এখানে $x \in [0, 1]$ নিয়ে কাজ করছি, তাই ছবিটা হবে Fig 4-র মত কিছু একটা। তা, এই জাতীয় গ্রাফের মধ্যে সহজতম হল Fig 5. এখানে গ্রাফটা সটান সোজা, তাই ওটার ফর্মুলা বার করা সহজ, $f(x) = 1 - x$. দেখতেই পাচ্ছ যে, এই $f(x)$-এর জন্য সত্যিই $f(f(x)) = x$ হচ্ছে। অতএব এই f-এর জন্য integral-টা বার করে নাও, $\int_0^1 (x - (1 - x))^{2016}\, dx = \cdots = \frac{1}{2017}$. ব্যস, এটাই উত্তর হতে বাধ্য!
তবে এইভাবে এগোনোর সমস্যা আছে। এক, যারা চট্ করে গ্রাফ দিয়ে ভাবতে পারো না, তাদের পক্ষে এই শর্টকাটটাও কঠিন। আর দুই, এটা তো আর MCQ নয় যে, যেমন তেমন করে আন্দাজ করে ফেলতে পারলেই হল। এখানে তোমাকে বিস্তারিতভাবে প্রমাণ করে দেখাতে হবে। সুতরাং এবার সেই চেষ্টা করা যাক। এবং সেই পথেই আমড়াতলার ব্যাপারটা ঘটবে। আগেই বলে রাখি যে, এই পথটা একবারে বার করতে পারি নি, বেশ কয়েকবার এদিক ওদিক ঢুঁ মেরে ব্যর্থ হয়ে তবে খুঁজে পেয়েছি। সুতরাং "এই কায়দাটা বোঝার জন্য দিব্যদৃষ্টি লাগে, আমার তো তা নেই" ভেবে যেন ইন্‌ফি খেয়ে যেও না।

$$I = \int_0^1 (x - f(x))^{2016}\, dx$$

$$= \int_1^0 (f(u) - u)^{2016} f'(u)\, du \quad \Big[\text{substituting } u = f(x) \iff x = f(u) \Big]$$

লক্ষ কর প্রান্ত দুটো উল্টে গেছে, কারণ $f(0) = 1$, অতএব $f(1) = f(f(0)) = 0$.
আর 2016-র নীচের তলায় $x - f(x)$-টা উল্টে $f(u) - u$ হয়ে গেছে।

$$= -\int_0^1 (u - f(u))^{2016} f'(u)\, du.$$

আমরা প্রান্তদুটোকে আবার স্বস্থানে ফিরিয়ে এনেছি, তাই চিহ্নটা উল্টেছে। $f(u) - u$-কেও উল্টে $u - f(u)$ লিখেছি, কিন্তু তাতে কোনো চিহ্ন বদলায় নি, কারণ 2016 হল even (জোড়)। এই নতুন integral-টা গোড়ার integral-টার মতই, বা তার চেয়েও বেশী জটিল বলে মনে হচ্ছে। কিন্তু দুটোকে মেলালে একটা লাভ আছে।

[1] কারণ সেই যেমন রবিঠাকুর গেয়েছিলেন--"মেঘের পরে মেঘ জমেছে, আঁধার করে আসে", তেমনি এখানে "f-এর পরে f লাগালে x-ই ফিরে আসে"।

So

$$\begin{aligned} I+I &= \int_0^1 (x-f(x))^{2016}\,dx - \int_0^1 (x-f(x))^{2016} f'(x)\,dx \\ &= \int_0^1 (x-f(x))^{2016}(1-f'(x))\,dx \\ &= \int_{-1}^1 t^{2016}\,dt \quad \left[\text{Substituting } t = x - f(x)\right] \\ &= \frac{2}{2017}. \end{aligned}$$

Hence $I = \frac{1}{2017}$.

■

Answers

1. $(x^2-2x+2)e^x + c$. **2.** $\sin x - x\cos x + c$. **3.** $d(e^x) = e^x\,dx,\ d(e^t) = e^t\,dt,\ d(\log x) = \frac{dx}{x}$, $d(\cos x) = -\sin x\,dx,\ d(1/\sqrt{x}) = -\frac{dx}{2x^{3/2}}$. **4.** *(i)* $d(\tan x)$. *(ii)* $d\left(\frac{x^2}{2}\right)$. *(iii)* $d\left(\frac{x^3}{3}\right)$. *(iv)* $d\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$. *(v)* $d(\log x)$.
5. *(i)* $\frac{1}{2}\log(x^2+1) + x\cot^{-1}x + c$. *(ii)* $-\frac{1}{2}\log(x^2+1) + x\tan^{-1}x + c$. *(iii)* $(x^2-2x+2)e^x + c$. *(iv)* $\frac{1}{3}x^3\log x - \frac{x^3}{9} + c$. *(v)* $\frac{1}{4}x^4\log x - \frac{x^4}{16} + c$.
6. $\frac{1}{2}(x^2\tan^{-1}x - x + \tan^{-1}x) + c$. **7.** *(i)* $\frac{1}{3}x^3\tan^{-1}x - \frac{1}{6}(x^2 - \log(x^2+1)) + c$. *(ii)* $\frac{1}{2}x^2\sin^{-1}x - \frac{1}{4}(\sin^{-1}x - x\sqrt{1-x^2}) + c$. *(iii)* $t\sinh t - \cosh t + c$.
8. *(i)* $\frac{1}{4}(\pi + 2\log 2) + c$. *(ii)* $\frac{1}{4}(\pi - 2\log 2) + c$. *(iii)* $10e^{-1} - 17e^{-2} + c$.
9. (C) আর (D) খালি ঠিক। এখানে (A) ভুল, কারণ $27F'(3) + F'(1) + 9F(3) + F(1) = 27F'(3) - F'(1) + 2F'(1) - 36 = -32 + 2F'(1) < -32$, $\because F'(1) < 0$. **10.** *(i)* $I_n = x^n\sin x + nx^{n-1}\cos x + n(n-1)I_{n-2}$. এটা ব্যবহার করে $I_4 = \left(24 - 12\,x^2 + x^4\right)\,\sin x + \left(4\,x^3 - 24\,x\right)\,\cos x + c$.
11. *(i)* $\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + c$. *(ii)* $-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + c$. *(iii)* $\frac{1}{13}e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + c$. *(iv)* $\frac{x}{2}(\cos\log x + \sin\log x) + c$. *(v)* $\frac{x}{2}(\sin\log x - \cos\log x) + c$.
12. $x\cot x + c$. **13.** $I = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Chapter V
Partial fraction

DAY 18
গোড়ার কথা

আমরা integration-এর নানারকম কায়দা শিখেছি। অনেক ক্ষেত্রেই চট্ করে বোঝা যায় না কোন কায়দাটা লাগালে কাজ হবে। কিছুটা আন্দাজ, এদিক-ওদিক ঢুঁ মারার দরকার থেকেই যায়। কিন্তু এক ধরণের function আছে, যাদেরকে integrate করার একটা বাঁধা পথ আছে। এই ধরণের function-কে দেখলেই তৎক্ষণাৎ চেনা যায়, এবং তারপর কোনোরকম কৌশল ছাড়াই সেই বাঁধা পথে এগোলেই চলে। এই বাঁধা পথটার নাম integration by partial fraction. যারা কম্পিউটারে indefinite integral বার করার প্রোগ্রাম লিখতে চায়, তাদের পক্ষে এই কায়দাটা একেবারে আদর্শ পন্থা। কম্পিউটারের কথাই যখন এল তখন একটা জিনিস বলে রাখি। একটা webpage আছে যেখানে বিনামূল্যে integration করা হয়--

`http://integrals.wolfram.com`

এখানে একটা জায়গা আছে, সেখানে integrand-টাকে টাইপ করে দিতে হবে। তারপর একটা বাটন টিপলেই উত্তরটা দিয়ে দেবে। ধাপগুলো অবশ্য বলবে না, কিন্তু তাও বিচ্ছিরি কোনো integration করার জন্য এটা খুবই কাজে দেয়। চাইলে উত্তরটাকে differentiate করে integrand-এ ফেরার চেষ্টা করতে পারো, এবং সেই ধাপগুলোকে উল্টে integration-এর ধাপগুলো আন্দাজ করতে পারো, যেমন গুণের সূত্র উল্টে by parts, কিংবা chain rule-কে উল্টে substitution, এইরকম। এরকম একটা প্রোগ্রামও আছে, যেটা একবার ইন্স্টল করে নিলে তোমার কম্পিউটারেই integration করতে পারবে, প্রতিবার ইন্টারনেট লাগবে না। প্রোগ্রামটার নাম `maxima`. ডাউনলোড করতে পয়সা লাগে না। এই বইয়ের অনেকগুলো integration-ই আমি এটা ব্যবহার করে করেছি।

যাক, আবার partial fraction-এর আলোচনায় ফিরে আসি। এই আলোচনায় polynomial-র ধারণাটা বার বার আসবে। শুরুতেই তাই **polynomial** কী জিনিস সেটা একটু মনে করে নিই। Polynomial হল এই ধরণের function

$$1 + 3x - 2x^3 \text{ বা } 2x^3 - x^{100} \text{ এইসব।}$$

একটা polynomial তৈরী হয় x-এর বিভিন্ন power যোগ করে। Power-গুলোর উপর তলায় খালি $0, 1, 2, \ldots$ ইত্যাদি সংখ্যাই থাকতে পারে, কোনো fraction বা negative সংখ্যা চলবে না। যেমন x^7, x^0, x^{1000} এসব চলবে, কিন্তু $\sqrt{x} \equiv x^{1/2}$ বা $\frac{1}{x} \equiv x^{-1}$ এসব চলবে না। প্রতিটা power-কে কিছু সংখ্যা দিয়ে গুণ করা যেতে পারে, যাকে বলে ওই power-টার **coefficient** যেমন $3x^2$-এ x^2-এর coefficient হল 3. Coefficient-গুলো যেকোনো real সংখ্যা হতে পারে। অতএব $\pi - e^{-1}x^2$ অবশ্যই একটা polynomial. কোনো polynomial-এর মধ্যে x-এর সবচেয়ে বড় যে power-টা থাকে, তার উপরতলার সংখ্যাটাকে বলে polynomial-টার **degree.** যেমন $100x + 0.0001x^{12}$-এর degree হল 12. তবে এখানে একটা ব্যাপারে সাবধান, কেউ যদি দুষ্টুমি করে এই polynomial-টা দেয়

$$x^{10} + 1 + x - 2x^{10} + x^5 + x^{10},$$

তবে যেন ফস্ করে বলে বোসো না যে এর degree হল 10. ভালো করে তাকিয়ে দ্যাখো, x^{10}-গুলো সব কাটাকাটি হয়ে যাচ্ছে। তাই এখানে degree আসলে 5. আর হ্যাঁ, এটা বলাই বাহুল্য, কিন্তু তাও বলি--ওই x অক্ষরটার কিন্তু এখানে আলাদা

কোনো গুরুত্ব নেই, চাইলে তুমি ওর জায়গায় u, v, y, t যা খুশি লিখতে পারো। যেমন $f(t) = 2t^8 - 3t^2 + t^6$ একটা polynomial, যার degree হল 8.
Polynomial-এর গল্প অনেক হল। এবার আবার integration-এর কায়দাটার কথায় ফিরে আসি। প্রথমেই বলে নিই কোন্ ধরণের integrand-এর বেলায় কায়দাটা খাটে। একটা উদাহরণ দিয়ে বললে সুবিধা হবে--

উপরতলায় যা খুশি polynomial

$$\frac{x^3 + 7x - 3}{(x-3)(2x+3)^3(x^2 - 3x + 7)^5}$$

Linear

Irreducible quadratic

পুরো জিনিসটা একটা fraction-এর মত, যার উপর নীচ দুদিকেই একটা করে polynomial. উপরের তলার polynomial-টা যা খুশি হতে পারে। নীচের তলারটা যেন পুরোপুরি factor-এ ভাঙা থাকে (মানে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা থাকে)। আশা করি জানো যে, যেকোনো polynomial-কেই সব সময়ে কিছু linear factor আর irreducible quadratic factor-এ ভেঙে ফেলা যায়। এখানে linear factor বলতে বোঝাচ্ছি $ax + b$ জাতীয় জিনিস (যেখানে $a \neq 0$), আর irreducible quadratic factor হল $ax^2 + bx + c$ জাতীয় জিনিস, যেখানে $b^2 - 4ac < 0$.
Partial fraction কায়দাটা কোন্ ধরণের integration-এর বেলায় কাজ করে সেটা বললাম। এবার বলি কী করতে হয়। এই কায়দাটার মূল দুটো ধাপ--

- এক, চারটে বিশেষ ধরণের integral বার করতে পারা,
- দুই, বাকি সব integral-কে ওই চারটে ধরণের integral দিয়ে প্রকাশ করা।

প্রথমে এই চারটে বিশেষ ধরণের integral-এর কথা বলি।

18.1 চারটে বিশেষ ধরণ

এরা হল

- x^n, যেখানে $n = 0, 1, 2, ...$
- $\frac{1}{(ax+b)^n}$, যেখানে $a \neq 0$ এবং $n = 1, 2, ...$
- $\frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}$, যেখানে $b^2 - 4ac < 0$ এবং $n = 1, 2, ...,$
- $\frac{x}{(ax^2+bx+c)^n}$, যেখানে $b^2 - 4ac < 0$ এবং $n = 1, 2, ...$

এরকম চেহারার function-দের integrate করা নিয়ে একে একে আলোচনা করি।

18.1.1 প্রথম দুই ধরণ

প্রথম দুই ধরণের function-কে integrate করতে আমরা জানিই--

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$$

এবং

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = -\frac{1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}} + c,$$

যেখানে c হল arbitrary constant.

18.1.2 তৃতীয় ধরণ

এইটাই হল সবচেয়ে ঝামেলার জিনিস। এটা একবার শিখে গেলে চতুর্থ ধরণটা সহজেই হয়ে যাবে। তৃতীয় ধরণের সবচেয়ে সহজ কেসটা আমরা আগেই শিখেছি। নীচের উদাহরণে সেটা একবার মনে করিয়ে দিই।

Example 1: $\int \frac{dx}{x^2+\alpha^2} = ?$

SOLUTION: এখানে আমরা $x = \alpha \tan u$ বসাই (যেখানে $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$)। তা হলে জিনিসটা হয়ে যায়

$$\int \frac{\alpha \sec^2 u}{\alpha^2 + \alpha^2 \tan^2 u} du = \frac{1}{\alpha} \int du = \frac{u}{\alpha} + c = \frac{1}{\alpha} \tan^{-1} \frac{x}{\alpha} + c,$$

যেখানে c হল arbitrary constant. ■

এরই সামান্য কঠিন সংস্করণ নীচের অংকটা।

Exercise 1: $\int \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2} = ?$

HINT:
এখানেও সেই একই substitution দিয়ে কাজ হবে, $x = \alpha \tan u$, যেখানে $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. এর ফলে পাব--

$$\int \frac{\alpha \sec^2 u}{(\alpha^2 + \alpha^2 \tan^2 u)^2} du = \frac{1}{\alpha^3} \int \cos^2 u \, du,$$

সেটাও কষে ফেলা যাবে, কারণ $\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$. ■

এবার আরো কঠিন করা যাক।

Exercise 2: $\int \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^3} = ?$

HINT:
ফের ওই একই substitution লাগালে পাবে

$$\int \frac{\alpha \sec^2 u}{(\alpha^2 + \alpha^2 \tan^2 u)^3} du = \frac{1}{\alpha^5} \int \cos^4 u \, du.$$

এইটা কিন্তু বার করা খুব সহজ বোধ হচ্ছে না। তবে একটা কায়দা করা যায়। আবার আমরা $\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$ ব্যবহার করব, কিন্তু পরপর দুবার--

$$\begin{aligned} \cos^4 u &= \left(\cos^2 u\right)^2 \\ &= \left(\tfrac{1}{2}(1 + \cos 2u)\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{4}(1 + 2\cos 2u + \cos^2 2u) \\ &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\cos 2u + \tfrac{1}{4}\cos^2 2u \\ &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\cos 2u + \tfrac{1}{8}(1 + \cos 4u). \end{aligned}$$

এইবার আর integrate করতে অসুবিধা নেই। ■

উপরের অংক দুটোকে generalise করব এবার।

Example 2: $\int \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^n}$ কী করে বার করা যেতে পারে?

SOLUTION: আগের অংক দুটো থেকেই আন্দাজ করেছ নিশ্চয়ই যে, $x = \alpha \tan u$ বসালেই integrand-টা cos-এর কোনো একটা even (জোড়) power-এ পরিণত হবে।
আমরা cos-এর odd (বিজোড়) power-দের integrate করতে পারি। আর জানি $\cos^2 u = \frac{1}{2}(1+\cos 2u)$. এই দুটো জিনিস বার বার করে ব্যবহার করে গেলেই cos-এর যেকোনো even power-কেই integrate করে ফেলা যায় (যদিও উত্তরটা অত্যন্ত বিচ্ছিরিরকমের লম্বা কিছু হতে পারে)। ■

এই কায়দাটা ছোটোখাটো n-এর বেলায় ভালোই। কিন্তু বড় n-এর বেলায় কঠিন হয়ে পড়ে। তখন একটা reduction formula জানা থাকলে সুবিধা হবে। নীচের theorem-এ এরকম একটা জিনিসেরই হদিস আছে। তবে হাতেকলমে অংক করার পক্ষে এটাও খুব সুবিধার জিনিস নয়। যারা কম্পিউটারে প্রোগ্রাম করে integration করে, তারাই খালি এটা নিয়ে মাথা ঘামায়।

THEOREM

Let $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^n}$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$ Then

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\alpha}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c, \\ I_{n+1} &= \frac{1}{2n\alpha^2}\left((2n-1)I_n + \frac{x}{(x^2+\alpha^2)^n}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Proof: এর মধ্যে I_1-এর ফর্মুলাটা তো এক্ষুণি একটা অংকে দেখলাম।

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^n} \\ &= \frac{x}{(x^2+\alpha^2)^n} - \int x \times d\left(\frac{1}{(x^2+\alpha^2)^n}\right) \quad [\text{by parts}] \\ &= \frac{x}{(x^2+\alpha^2)^n} + n\int \frac{2x^2}{(x^2+\alpha^2)^{n+1}}dx \\ &= \frac{x}{(x^2+\alpha^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+\alpha^2-\alpha^2}{(x^2+\alpha^2)^{n+1}}dx \\ &= \frac{x}{(x^2+\alpha^2)^n} + 2n\left[\int \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^n} - \alpha^2\int \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^{n+1}}\right] \\ &= \frac{x}{(x^2+\alpha^2)^n} + 2n\left[I_n - \alpha^2 I_{n+1}\right] \\ &= \frac{x}{(x^2+\alpha^2)^n} + 2nI_n - 2n\alpha^2 I_{n+1}. \end{aligned}$$

অতএব

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n\alpha^2}\left((2n-1)I_n + \frac{x}{(x^2+\alpha^2)^n}\right),$$

ঠিক যেমনটা দরকার ছিল। **[Q.E.D]**

মনে রেখো তৃতীয় ধরণের integral-দের চেহারা এইরকম--

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n},$$

যেখানে $n = 1, 2, 3, \ldots$ এবং $b^2 - 4ac < 0$. আমরা এতক্ষণ এর একটা বিশেষ রূপ নিয়েই খালি কাজ করছিলাম, যেখানে $ax^2 + bx + c$-এর জায়গায় $x^2 + \alpha^2$ থাকছিল। তা, যখনই $b^2 - 4ac < 0$ হবে, তখনি $ax^2 + bx + c$-কে square complete করে আর তারপরে substitute করে $x^2 + \alpha^2$ চেহারায় এনে ফেলা যাবে। একটা উদাহরণ দেখি।

Example 3: $\int \frac{dx}{(2x^2-4x+3)^3}$ বার করতে হলে কী করে এগোবে?

SOLUTION: প্রশ্নটার ধরণটা লক্ষ কর। Integral-টা পুরো করতে বলি নি কিন্তু, খালি কী করে এগোবে সেটা বর্ণনা করতে বলেছি। বর্ণনাটা করা সহজ, কিন্তু সেই বর্ণনা অনুযায়ী কষাটা বড্ড লম্বা আর বিরক্তিকর, কালঘাম ছুটে যাবে। প্রথমে square complete করতে হবে--

$$2x^2 - 4x + 3 = 2(x^2 - 2x) + 3 = 2(x^2 - 2x + 1) - 2 + 3 = 2(x - 1)^2 + 1^2.$$

সুতরাং

$$\int \frac{dx}{(2x^2 - 4x + 3)^3} = \int \frac{dx}{(2(x - 1)^2 + 1^2)^3}.$$

এবার $t = \sqrt{2}(x - 1)$ বসালেই $dx = \frac{1}{\sqrt{2}}dt$ এবং

$$\int \frac{dx}{(2(x - 1)^2 + 1^2)^3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{(t^2 + 1^2)^3},$$

যেটাকে ঘায়েল করার কলকাঠি আমরা আগেই শিখেছি। ■

পুরো জিনিসটা একবার হাতেনাতে না করলে ভুলে যেতে পারো। তাই নীচের অংকটা দিচ্ছি।

Exercise 3: $\int \frac{dx}{(x^2+4x+13)^2} = ?$ ■

18.1.3 চতুর্থ ধরণ

চতুর্থ ধরণটা ছিল এইরকম--

$$\int \frac{x\,dx}{(ax^2 + bx + c)^n},$$

যেখানে $n = 1, 2, 3, \ldots$ এবং $b^2 - 4ac < 0$.
এটাকে ঘায়েল করার কায়দা হল এটাকে প্রথমে তৃতীয় ধরণের একটা integral-এ পরিণত করা। একটা উদাহরণ দিলে বুঝতে সুবিধা হবে।

Example 4: $\int \frac{xdx}{(x^2+x+1)^3} = ?$

SOLUTION: নীচের তলায় যে irreducible quadratic-টা আছে তার derivative হল $2x + 1$. আমরা উপরতলার x-টাকে এই derivative-টা দিয়ে লিখব--

$$x = \frac{1}{2}\big((2x + 1) - 1\big).$$

তাহলে integral-টা হয়ে যাবে

$$\int \frac{xdx}{(x^2 + x + 1)^3} = \frac{1}{2} \int \frac{(2x + 1) - 1}{(x^2 + x + 1)^3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + x + 1)}{(x^2 + x + 1)^3} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^3}.$$

এখানে ডানদিকের প্রথম integral-টায় $t = x^2 + x + 1$ বসালেই সেটা হয়ে যাবে $\int \frac{dt}{t^3}$, যেটা বার করা খুবই সহজ। আর বাকি integral-টা হবে তৃতীয় ধরণের। ■

বুঝে নাও যে, এই অংকের কায়দায় আমরা চতুর্থ ধরণের যেকোনো integral-কেই বার করে ফেলতে পারি।

Exercise 4: বার করো--

1. $\int \frac{x\,dx}{(2x^2-4x+10}$.
2. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$.
3. $\int \frac{x\,dx}{(2x^2-4x+3)^3}$.

■

DAY 19
Partial fraction

গতকাল আমরা চার ধরণের function-কে integrate করা শিখেছি। আজকে আমরা শিখব কী করে যেকোনো

$$\frac{\text{polynomial}}{\text{polynomial}}$$

চেহারার function-কে ওই চার ধরণের function দিয়ে প্রকাশ করা যায়। কাজটার মধ্যে বুদ্ধি খাটাবার খুব একটা জায়গা নেই, খালি দাঁতে দাঁত চেপে একটা প্রক্রিয়া করে যেতে হবে। ধাপে ধাপে বলি।

19.1 প্রথম ধাপ

এই ধাপে কাজ হল এমন ব্যবস্থা করা যাতে উপর তলার polynomial-টার degree নীচের তলার degree-র চেয়ে কম থাকে। যদি গোড়াতেই তা থাকে তো ভালোই, না হলে উপরতলাকে নীচেরতলা দিয়ে ভাগ করে নিতে হবে। একটা উদাহরণ দেখি।

Example 5: ধরো $\int \frac{x^3+8x^2+20x+2}{(x+3)(x+4)}dx$ বার করতে হবে। তাহলে প্রথম ধাপে কী করবে? আর যদি $\int \frac{20x+2}{(x+3)(x+4)}dx$ বার করতে দিত?

SOLUTION: প্রথম ক্ষেত্রে দেখা যাচ্ছে যে, নীচের তলার degree হল 2, আর উপরতলার degree হল $3 > 2$. সুতরাং ভাগ করতে হবে--

$$\begin{aligned}\frac{x^3+8x^2+20x+2}{(x+3)(x+4)} &= \frac{x^3+8x^2+20x+2}{x^2+7x+12} \\ &= \frac{x(x^2+7x+12)+x^2+8x+2}{x^2+7x+12} \\ &= x + \frac{x^2+8x+2}{x^2+7x+12} \\ &= x + \frac{(x^2+7x+12)+x-10}{x^2+7x+12} \\ &= x+1+\frac{x-10}{x^2+7x+12}.\end{aligned}$$

অতএব
$$\int \frac{x^3+8x^2+20x+2}{(x+3)(x+4)}dx = \int x\,dx + \int dx + \int \frac{x-10}{x^2+7x+12}dx.$$
লক্ষ করো, এই ভাগের যে **quotient** (কোশেন্ট্ বা ভাগফল) অংশটা সেটা কেমন প্রথম ধরণের integral-এর জন্ম দিল। বাকি **remainder** (ভাগশেষ) অংশটাকে কায়দা করার জন্যই বাকি তিনটে ধরণ কাজে লাগবে।
অংকটার দ্বিতীয় অংশের integral-টা হল $\int \frac{20x+2}{(x+3)(x+4)}dx$. এখানে কিন্তু এত কষ্ট করতে হবে না। উপর তলার degree নীচের তলার degree-র চেয়ে কমই আছে। অতএব প্রথম ধাপটার দরকারই হচ্ছে না। ■

এই অংকটা সহজ ছিল। কিন্তু যদি polynomial-গুলো আরেকটু লম্বা হত, তবে এইভাবে লিখে লিখে ভাগটা করা কঠিন হত। তখন আমরা polynomial-এর **long division** লাগাতাম। এইরকম ভাগ করা আমরা সাধারণতঃ স্কুলে থাকতেই শিখে থাকি। যদি মনে না থাকে তবে নীচের উদাহরণটা দেখলেই মনে পড়ে যাবে--

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ x^2-3x+2 & 3x^2-2x+1 \\ & \underline{3x^2-9x+6} \\ & 7x-5 \end{array}$$

Exercise 5: নীচের integral-গুলোর উপর প্রথম ধাপ লাগাও। সাবধান, পুরো integration-টা করতে বলি নি কিন্তু, খালি প্রথম ধাপটা করতে বলেছি।

1. $\int \frac{x^4+12x^3+51x^2+90}{(x+3)(x+4)^2}dx$
2. $\int \frac{x^4-75x+56}{(x+1)(x+2)(x+3)^4}dx$

■

19.2 দ্বিতীয় ধাপ

দ্বিতীয় ধাপের কাজ হল নীচের তলার polynomial-টাকে factor-এ ভেঙে নেওয়া, প্রতিটা factor-ই যেন linear কিংবা irreducible quadratic factor হয়। আরেকবার মনে করিয়ে দিই, linear factor মানে $ax+b$ জাতীয় জিনিস (যেখানে $a \neq 0$), আর irreducible quadratic factor মানে ax^2+bx+c জাতীয়, যেখানে $b^2-4ac<0$. একটা theorem আছে যেটা বলে যে, যেকোনো polynomial-কেই এইভাবে ভেঙে ফেলা সম্ভব। অবশ্যই যেকোনো একটা polynomial দেওয়া থাকলেই সেটাকে এরকমভাবে ভেঙে ফেলা সহজ নাও হতে পারে। কিন্তু আমরা যে সব অংক দেখব সেখানে কাজটা সহজই হবে।
ধরো এই ধাপের পর নীচের polynomial-টাকে তুমি এইভাবে ভেঙে ফেলতে পেরেছ--
$$x^5(2x-3)^2(x+1)(x^2+1)^6,$$
এখানে linear factor-গুলো হল--

- x, যেটা পাঁচবার এসেছে,
- $(2x-3)$, যেটা দুবার এসেছে,
- আর $(x+1)$, যেটা এসেছে মোটে একবার।

এখানে irreducible quadratic factor একটাই--

- (x^2+1), যেটা ছয়বার এসেছে।

Example 6: এই polynomial-টাকে linear আর irreducible quadratic factor-এ ভাঙো--

$$(1-x^2)(1-x)(x^2+2).$$

SOLUTION:এখানে সাবধান। যদিও $1-x^2$-টা এখানে quadratic, কিন্তু তাও ওটা মোটেই irreducible নয়, ওটাকে আরো ভাঙা যায়, $1-x^2=(1-x)(1+x)$. সুতরাং সব মিলিয়ে হচ্ছে $(1+x)(1-x)^2(x^2+2)$. ■

Exercise 6: এই polynomial-গুলোকে linear আর irreducible quadratic factor-এ ভাঙো--

1. $(x^3-1)(x^4-1)$.
2. $(x^3+3x^2+3x+1)^2$.
3. x^4-5x^2+6.

■

19.3 তৃতীয় ধাপ

আমরা যেকোনো

$$\frac{\text{polynomial}}{\text{polynomial}}$$

চেহারার function-কেই সেই চার ধরণের function দিয়ে লেখার চেষ্টা করছি। প্রথম ধাপে long division করে যে ভাগফলটা পেয়েছিলাম সেখান থেকেই প্রথম ধরণের function পেয়ে গেছিলাম। এখন উপরতলার polynomial-টার degree নীচের তলারটার চেয়ে কম। এই চেহারার যেকোনো function-কে আমরা বাকি তিন ধরণের function দিয়ে লিখব। সেটাই হল partial fraction-এর মোক্ষম কাজ।
একটা উদাহরণ দিয়ে বোঝাই।

Example 7: ধরো নীচের তলার polynomial-টা হল $x^3(1-x)(1+x)^2(1+x^2)$. এর degree হল $3+1+1\times 2+2=8$. সুতরাং ধরে নিচ্ছি উপর তলায় একটা <8 degree-র polynomial আছে। তাহলে আমরা সবসময়েই পুরোটাকে এইভাবে লিখতে পারব--

$$\underbrace{\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}}+\underbrace{\frac{B_1}{1-x}}+\underbrace{\frac{C_1}{1+x}+\frac{C_2}{(1+x)^2}}+\underbrace{\frac{D_1+E_1x}{1+x^2}}+\underbrace{\frac{D_2+E_2x}{(1+x^2)^2}},$$

যেখানে A_i, B_i, C_i, D_i আর E_i-রা হল কিছু সংখ্যা[1]। এই সংখ্যাগুলো বার করার একটা কায়দা আছে। সেটা শিখব পরের ধাপে। আপাততঃ এই চেহারাটা বুঝে নাও--

- এখানে x ছিল 3-খানা। সেখান থেকে ঠিক 3-খানা term এসেছে, এদের নীচের তলায় রয়েছে x, x^2 আর x^3. (মানে x-এর power-টা এক এক করে বাড়তে বাড়তে 3 অব্ধি গেছে)। আর উপর তলায় প্রতিক্ষেত্রে একটা করে সংখ্যা আছে, যাদেরকে আমরা A_1, A_2, A_3 নাম দিয়েছি।

[1]এমনভাবে যে লেখা যাবেই, সেটা একটা theorem থেকে আসে। আমরা এখানে সেই theorem-এর বিস্তারিত আলোচনায় যাব না।

- এরপর $1-x$ ছিল একখানা। তাই তার জন্য term-ও এসেছে একখানাই। তার নীচে $1-x$, উপরে একটা সংখ্যা।
- তারপর ছিল $1+x$, মোট সংখ্যা 2. সুতরাং দুটো term এসেছে। নীচে রয়েছে $1+x$ আর $(1+x)^2$, উপরে কিছু সংখ্যা, যাদেরকে C_1, C_2 বলেছি।
- পরবর্তী আকর্ষণ হল $(1+x^2)$, সংখ্যায় দুটো আছে। এটা একটা irreducible quadratic factor. এর বেলায় নিয়মটা সামান্য অন্য। এখানেও দুটো term-ই এসেছে, তাদের নীচেও যথারীতি $1+x^2$ আর $(1+x^2)^2$ রয়েছে। কিন্তু উপরতলায় সংখ্যার বদলে আছে D_1x+E_1 এবং D_2x+E_2.

■

চেহারাটা ভালো করে সড়গড় হয়ে নাও নীচের অংকটা করে।

Exercise 7: নীচের প্রতিটা ক্ষেত্রে partial fraction আকারে লেখো। সংখ্যাগুলো বার করতে হবে না, খালি চেহারাটা লিখলেই চলবে।

1. $\frac{3x^5+2x^4-x^2+1}{(x-1)(x-2)^2(x-3)^3}$
2. $\frac{x^3+3x^2-6x+4}{x^4-1}$
3. $\frac{1}{(x^2+2x+10)^3(1-x)}$

■

19.4 চতুর্থ ধাপ

এই ধাপে সংখ্যাগুলো বার করা শিখব। এই জায়গাটাই সবচেয়ে কঠিন। একটা উদাহরণ নিয়ে শুরু করি।

Example 8: $\frac{2x^2+3x-6}{(x-1)(x-2)(x-3)}$-এর উপরে partial fraction লাগাও।

SOLUTION: এখানে উপরতলার degree নীচের তলার চেয়ে কমই আছে। তাই long division করার দরকার নেই। নীচেরতলাকে factor-এ ভেঙেই দিয়েছে। প্রতিটা factor-ই linear, একবার করেই এসেছে। তাই partial fraction-এর চেহারাটা লিখে ফেলতে পারি--

$$\frac{2x^2+3x-6}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{C_1}{x-3},$$

যেখানে A_1, B_1, C_1 হল কিছু সংখ্যা, যেগুলোকে বার করাই এখানে আমাদের উদ্দেশ্য। এর জন্য দুই পাশকে নীচের তলার $(x-1)(x-2)(x-3)$-টা দিয়ে গুণ করে দাও। তাহলে পাবে--

$$2x^2+3x-6 = A_1(x-2)(x-3) + B_1(x-1)(x-3) + C_1(x-1)(x-2).$$

এখানে $x=1$ বসালেই টুক্ করে B_1 আর C_1 খসে পড়বে, পড়ে থাকবে খালি $-1=2A_1$, যেখান থেকে বেরিয়ে যাচ্ছে $A_1=-\frac{1}{2}$.
একইভাবে $x=2$ বসালে A_1 আর C_1 ঝরে গিয়ে বাকি থাকবে $8=-B_1$. সুতরাং B_1-ও পেয়ে গেলে।
এবার x-এর কোন্ value বসালে একইভাবে A_1, B_1 লোপাট হয়ে খালি C_1 পড়ে থাকবে, সেটা নিশ্চয়ই আন্দাজ করতে পারছ?
সব মিলিয়ে পাবে--

$$\frac{2x^2+3x-6}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{-\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{8}{x-2} + \frac{\frac{21}{2}}{x-3}.$$

■

সংখ্যাগুলো বার করার এই কায়দাটাকে বলে **cover up method.** এখানে x-এর এমন সব value বসাচ্ছিলাম, যাতে একজন ছাড়া বাকিরা লোপাট হয়ে যায় (বা ঢাকা পড়ে যায়), সেই "ঢাকা পড়া" থেকেই cover up নামটার উৎপত্তি। যদি নীচের তলার polynomial-টার যাবতীয় factor-ই linear হয়, এবং প্রত্যেকেই ঠিক একবার করেই আসে, তবে এই cover up-এর কায়দাতেই সবগুলো সংখ্যা বার করে দেওয়া যায়। নীচের অংকটা করে ব্যাপারটা ভালো করে হজম করে নাও।

Exercise 8:

1. $\frac{x^2+2x+1}{(x-1)(x+2)(x-5)}$
2. $\frac{1}{(2x-3)(x^2-1)}$
3. $\frac{x^2-5x+6}{(3x-2)(x^2-4)}$

■

এই অংকগুলোতে নীচের তলার সবগুলো factor-ই linear ছিল, এবং একবার করেই এসেছিল, তাই খালি cover up-এই কাজ হয়ে গেল। কিন্তু যদি কোনো linear factor একাধিকবার আসত, বা কোনো irreducible quadratic factor থাকত, তবে খালি cover up-এই কাজ হত না, আরো কিছু করতে হত। এবার সেরকম একটা উদাহরণ দেখাই।

Example 9: $\frac{2x^2+3x-6}{(x-1)^2(x-2)(x-3)}$-এর উপরে partial fraction লাগাও।

SOLUTION:এটা প্রায় আগের অংকটাই খালি $(x-1)$-টা দুবার এসেছে। প্রথমে partial fraction-এর চেহারাটা লিখে নিই--

$$\frac{2x^2+3x-6}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A_1}{x-1} + \underbrace{\frac{A_2}{(x-1)^2}}_{\text{নতুন}} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{C_1}{x-3}.$$

আগের মতই এবারও দুপাশকে নীচের তলার $(x-1)^2(x-2)(x-3)$-টা দিয়ে গুণ করে পাব--

$$2x^2+3x-6 = A_1(x-1)(x-2)(x-3) + A_2(x-2)(x-3) + B_1(x-1)^2(x-3) + C_1(x-1)^2(x-2).$$

এবার $x=1$ বসাব (আগের মতই)। এর ফলে A_1, B_1 আর C_1 ঢাকা পড়ে গিয়ে খালি A_2 বেরিয়ে যাবে, $-1 = 2A_2$, মানে $A_2 = -\frac{1}{2}$. একইভাবে $x=2$ বসালে B_1 আর $x=3$ বসালে C_1-ও বেরোবে। কিন্তু A_1 এখনও অধরাই থেকে গেছে। $x = 1, 2, 3$ যাই বসাও না কেন, A_1-টা সবক্ষেত্রেই ঢাকা পড়ে যাচ্ছে।
অতএব A_1 বার করার জন্য খালি cover up-এ কাজ হচ্ছে না। আরো কড়া দাওয়াই চাই। তার জন্য দুই পাশেই সব ব্র্যাকেট তুলে পুরো গুণ করে polynomial আকারে লেখো--

$$\begin{aligned} 2x^2+3x-6 &= (A_1+B_1+C_1)x^3 \\ &\quad +(-4C_1-5B_1+A_2-6A_1)x^2 \\ &\quad +(5C_1+7B_1-5A_2+11A_1)x \\ &\quad +(-2C_1-3B_1+6A_2-6A_1). \end{aligned}$$

এবার দুই দিকেই তো একই polynomial হওয়া উচিত। তাই coefficient ধরে ধরে সমান করলেই কয়েকটা equation পাবে--

$$\begin{aligned} A_1+B_1+C_1 &= 0 \\ -4C_1-5B_1+A_2-6A_1 &= 2 \\ 5C_1+7B_1-5A_2+11A_1 &= 3 \\ -2C_1-3B_1+6A_2-6A_1 &= -6. \end{aligned}$$

প্রথম equation-টা পেয়েছি দু পাশের x^3-এর coefficient সমান করে, দ্বিতীয়টা পেয়েছি x^2-এর coefficient থেকে, এইরকম।
এতগুলো equation দেখে ঘাবড়ে যেও না। মনে রেখো, A_2, B_1 আর C_1 তুমি cover up করেই পেয়ে গেছ--

$$A_2 = -\frac{1}{2}, \quad B_1 = -8 \text{ আর } C_1 = \frac{21}{2}.$$

খালি A_1 বার করার অপেক্ষা। তাই এর মধ্যে যেকোনো একটা equation থেকেই তুমি A_1 বার করতে পারবে। যেমন ধরো, যদি প্রথম equation-টা নিই, তবে পাব $A_1 = -B_1 - C_1 = 8 - \frac{21}{2} = -\frac{5}{2}$. চাইলে এই value-টা অন্য equation-গুলোতে বসিয়ে দেখতে পারো, মেলে কিনা। না মিললে বুঝবে হিসেবে কোথাও ভুল হয়েছে! ■

এই যে coefficient মেলানোর কায়দাটা বললাম (বা ইংরাজিতে বললে **coefficient matching**), সেই কায়দাটা কিন্তু জবরদস্ত। চাইলে তুমি সবগুলো A_i, B_i, C_i ইত্যাদিই এই কায়দায় বার করে দিতে পারো, cover up ব্যবহার না করেই। তবে তার জন্য গুচ্ছের equation নিয়ে কাজ করতে হবে। সেই কারণেই শুরুতে cover up করে লোকে যতটা সম্ভব খাটনি বাঁচানোর চেষ্টা করে।
এবার একটা irreducible quadratic factor-ওয়ালা উদাহরণ দেখাই।

Example 10: $\frac{x^5-2x^3+x^2-1}{(1-x^2)(x^2+1)^2}$-এর উপরে partial fraction লাগাও।

SOLUTION: সাবধান, যেভাবে লিখেছে মনে হচ্ছে যেন কোনো linear factor নেই, খালি quadratic factor দিয়েই তৈরী নীচের polynomial-টা। আসলে কিন্তু তা নয়। ওই $1-x^2$-টাকে আরো ভাঙা সম্ভব--

$$1 - x^2 = (1+x)(1-x).$$

তার মানে দুটো linear factor (একবার করে), আর একটা irreducible quadratic factor (দুবার করে)। সুতরাং partial fraction-এর চেহারাটা হবে

$$\frac{x^5 - 2x^3 + x^2 - 1}{(1+x)(1-x)(x^2+1)^2} = \frac{A_1}{1+x} + \frac{B_1}{1-x} + \frac{C_1 x + D_1}{x^2+1} + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2+1)^2}.$$

দুপাশকে নীচের তলার $(1+x)(1-x)(x^2+1)^2$ দিয়ে গুণ করে পাবে--

$$x^5 - 2x^3 + x^2 - 1 = A_1(1-x)(x^2+1)^2 + B_1(1+x)(x^2+1)^2 + (C_1x+D_1)(1-x^2)(x^2+1) + (C_2x+D_2)(1-x^2).$$

যেহেতু linear factor দুটো আছে, তাই x-এর দুরকম value বসালে cover up করা যাবে। প্রথম linear factor-টা ছিল $1+x$, তার জন্য cover up হবে $x=-1$ বসালে। সেখান থেকে আসবে $A_1 = \frac{1}{8}$. অন্য linear factor-টা হল $1-x$, তার জন্য cover up হবে $x=1$ বসালে। সেক্ষেত্রেও পাবে $B_1 = -\frac{1}{8}$.
আরো একটু এগোনো যায় cover up করে, কিন্তু তার জন্য complex number আনতে হবে। যদি $x=i$ বসাও, তবে $1+x^2=0$ হয়ে যাবে। তাই C_2 আর D_2 ছাড়া সবই ঢাকা পড়ে যাবে। পড়ে থাকবে--

$$\underbrace{i^5 - 2i^3 + i^2 - 1}_{i-2} = 2(C_2 i + D_2).$$

এ থেকে পাবে $C_2 = \frac{3}{2}$ আর $D_2 = -1$.
ব্যস্, cover up-এর দম এখানেই খতম! বাকি দুটো সংখ্যা, মানে C_1 আর D_1-র জন্য coefficient matching ছাড়া পথ নেই। মোট ছয়টা equation থাকবে (constant term থেকে শুরু করে x^5-এর coefficient পর্যন্ত match করাতে হবে বলে)। কিন্তু সবগুলো লেখার কোনো দরকার নেই। আমাদের তো খালি দরকার দুটো, যাদের থেকে C_1 আর D_1 বার

করা যাবে। এরকম সুবিধামত দুটো পাবে x-এর সবচেয়ে বড় power-এর (মানে x^5-এর) coefficient মেলালে, এবং x-এর সবচেয়ে ছোটো power-এর coefficient (মানে constant term) মেলালে। এই দুটো equation হল--

$$\begin{aligned} 1 & \quad -A_1 + B_1 - C_1 = -\frac{1}{4} - C_1 \\ -1 &= A_1 + B_1 + D_1 + D_2 = D_1 - 1. \end{aligned}$$

এদের থেকে পাচ্ছি $C_1 = -\frac{5}{4}$ আর $D_1 = 0$. ■

DAY 20
হাতেকলমে

আশা করি গতকালের আলোচনার পরে একটা জিনিস হাড়ে হাড়ে বুঝতে পেরেছ--partial fraction-এর কায়দাটা লাগাতে বুদ্ধি তেমন না লাগলেও পরিশ্রম অনেক। সেই কারণে হাতেকলমে করতে গেলে অংকগুলো প্রায়শঃই বড্ড লম্বা এবং বিচ্ছিরি হয়ে যায়। আমরা প্রথমে কিছু অংক দেখব যাদের বেলায় হাতেকলমে partial fraction করতে খুব কষ্ট হয় না। তারপর কিছু শর্টকাট আলোচনা করব, যেগুলো সবসময়ে কাজ করে না, কিন্তু করলে পরে partial fraction-এর অনেক পরিশ্রম বাঁচানো যায়।

Exercise 9: নীচের অংকগুলো partial fraction ব্যবহার করে করো--

1. $\int_{-3}^{0} \frac{-2w^3+w^2+2w+13}{w^2+2w+3}\,dw$
2. $\int \frac{3x^2+x+6}{x^4+3x^2+2}\,dx$
3. $\int \frac{1-4x-3x^2-3x^3}{x^4+x^3+x^2}\,dx$
4. $\int \frac{4x^3-2x^2+x}{x^4-x^3-x+1}\,dx$
5. $\int \frac{x^2+3}{x^3+x}\,dx$
6. $\int \frac{2x^3-3x+9}{x^3-3x^2+7x-5}\,dx$
7. $\int \frac{2x^3+x^2+2x-1}{x^4-1}\,dx$
8. $\int \frac{x^5-2x^4+x^3-3x^2+2x-5}{x^3-2x^2+x-2}\,dx$
9. $\int \frac{x^7+9x^5+2x^3+4x^2+9}{x^4+9x^2}\,dx$
10. $\int \frac{2x^2+9x+9}{(x-1)(x^2+4x+5)}\,dx$
11. $\int \frac{2x^4+x^3+4x^2+2}{x^5+2x^3+x}\,dx$
12. $\int \frac{5u^2+11u-4}{u^3+u^2-2u}\,du$
13. $\int_{1}^{2} \frac{2\,dw}{w^3+2w}$

■

20.1 Derivative-এর শর্টকাট

ধরো তোমাকে এই অংকটা দিলাম--

Example 11: $\int \frac{6x^5-15x^4+4x^3-3x^2+6x-2}{x^6-3x^5+x^4-x^3+3x^2-2x+37}dx = ?$

HINT:
Polynomial দুটোর চেহারা দেখেই নিশ্চয়ই কান্না পেয়ে যাচ্ছে? নীচেরটাকে factor-এ ভাঙতেই তো মাথা খারাপ হয়ে যাবে! কিন্তু ভালো করে চেয়ে দ্যাখো, উপরতলার polynomial-টা নীচের তলার polynomial-টার derivative. তাই উত্তরটা একলাইনে লিখে দেওয়া যাবে--

$$\log|x^6 - 3x^5 + x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 37| + c,$$

যেখানে c একটা arbitrary constant.
■

অনেক সময়ে এই derivative-এর ব্যাপারটা একটু লুকিয়ে থাকে। যেমন ধরো নীচের উদাহরণে--

Example 12: $\int \frac{x^4+6x^3+2x^2-7x}{x^4+2x^3-4x^2+x-1}dx = ?$

SOLUTION: এখানে উপরতলার degree নীচের তলার সমান, তাই ভাগ করে নেওয়া দরকার। সেটা চোখে দেখেই করা যায়--

$$x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 7x = (x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 1) + (4x^3 + 6x^2 - 8x + 1).$$

তাই

$$\int \frac{x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 7x}{x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 1}dx = \int dx + \int \frac{4x^3 + 6x^2 - 8x + 1}{x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 1}dx.$$

শেষের integral-টার বেলায় সেই প্যাটার্ণটা রয়েছে, নীচেরতলার derivative হল উপরতলাটা। সুতরাং পাচ্ছি--

$$\int \frac{x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 7x}{x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 1}dx = x + \log|x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 1| + c,$$

যেখানে c হল একটা arbitrary constant. ■

এই derivative-এর ব্যাপারটা অন্যভাবেও আসতে পারে। আসল কথাটা হল, নীচের তলার polynomial-টার derivative-টা মাথায় রাখা, যাতে কোথাও ওটা লুকিয়ে থাকলেই চট্ করে চোখে পড়ে যায়। আরেকটা উদাহরণ দেখা যাক।

Example 13: $\int \frac{x^3-2x}{x^4-4x^2+10}dx = ?$

SOLUTION: এখানে লক্ষ করো নীচের তলার polynomial-টা খালি x-এর even (জোড়) power দিয়ে তৈরী, আর উপরতলাটা তৈরী কেবল odd (বিজোড়) power দিয়ে। এখানে $t = x^2$ বসালে সুবিধা হবে।

$$\int \frac{x^3 - 2x}{x^4 - 4x^2 + 10}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^2 - 2}{x^4 - 4x^2 + 10}d(x^2) = \frac{1}{2}\int \frac{t - 2}{t^2 - 4t + 10}dt.$$

এবার নীচের তলার derivative-টা হল $2t-4$, যার ঠিক অর্ধেক রয়েছে উপরতলায়। তাই উত্তর হবে $\frac{1}{4}\log|t^2-4t+10|+c$, যেখানে c হল একটা arbitrary constant. ■

নীচের অংকগুলো তোমার করার জন্য।

Exercise 10:

1. $\int \frac{x^3+4x}{x^6-x^4+x^2-1} dx.$

2. $\int \frac{x^5+x^2}{x^6-5x^3+6} dx.$

■

20.2 $\frac{1}{x}$-এর শর্টকাট

লক্ষ করেছো নিশ্চয়ই যে, নীচের তলার polynomial-টার degree যতই বেশী হয়, partial fraction করা ততই দুরূহ হয়ে ওঠে। কারণ সেটাকে factor-এ ভাঙাও কঠিন হয়, factor-এর সংখ্যাও বেশী হয়, আর তাই প্রচুর term-ও এসে যায়। নীচের প্রতিটা অংকই সেইরকম। সরাসরি partial fraction লাগাতে গেলে নাকের জলে চোখের জলে একাকার হয়ে যাবে। কিন্তু প্রতিক্ষেত্রেই একটা শর্টকাট ব্যবহার করা যাবে, সেটা হল x-এর জায়গায় $\frac{1}{t}$ বসানো।

Example 14: The integral $\int \frac{3x^{13}+2x^{11}}{(2x^4+3x^2+1)^4} dx$ is equal to (where c is a constant of integration)

(A) $\frac{x^4}{(2x^4+3x^2+1)^3} + c$

(B) $\frac{x^{12}}{6(2x^4+3x^2+1)^3} + c$

(C) $\frac{x^4}{6(2x^4+3x^2+1)^3} + c$

(D) $\frac{x^{12}}{(2x^4+3x^2+1)^3} + c$

(JEE(main)2019)

SOLUTION: এখানে অবশ্যই MCQ ঠাকুরের কৃপা আছে। কোনো integration না করেই অংকটা করে ফেলা যায়। চারটে option-কে differentiate করে দেখা যায় কোন্ ক্ষেত্রে $\frac{3x^{13}+2x^{11}}{(2x^4+3x^2+1)^4}$ আসে। কাজটা যতটা ভয়ানক মনে হচ্ছে, ততটা মোটেই নয়, কারণ option-গুলো সবই একইরকম। অতএব একটাকে differentiate করলেই বাকিগুলো করতে আর বেশী খাটতে হবে না।

তবে এটা নেহাতই ফাঁকি হল। আমরা এই শর্টকাটটার কথা বলছিলাম না। আমাদের শর্টকাটটা সত্যিই integration-এর শর্টকাট। প্রথমেই লক্ষ করো, নীচের তলার সবগুলো power হল even, আর উপরতলায় odd. তাই $t = x^2$ বসালে সুবিধা

হবে--

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^{13}+2x^{11}}{(2x^4+3x^2+1)^4}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{3t^6+2t^5}{(2t^2+3t+1)^4}\,dt \quad \left[\text{substituting } t=x^2\right]
\end{aligned}$$

এর ফলে x-এর power-গুলোর চেয়ে t-এর power-গুলো খানিকটা ছোটো হয়েছে বটে, কিন্তু তাও t-এর বেশ কিছু মস্ত মস্ত সব negative power রয়ে গেছে। ওগুলোকে তাড়াতে চাই। তার জন্য $s=\frac{1}{t}$ বসাব। এখানে $dt=-\frac{ds}{s^2}$ হবে।

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\int \frac{3s^{-6}+2s^{-5}}{(2s^{-2}+3s^{-1}+1)^4}\,\frac{ds}{s^2} \quad \left[\text{substituting } s=\tfrac{1}{t}\right]\\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{3+2s}{s^8(2s^{-2}+3s^{-1}+1)^4}\,ds\\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{3+2s}{(2+3s+s^2)^4}\,ds\\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^4} \quad \left[\text{substituting } u=2+3s+s^2\right]\\
&= \frac{1}{6u^3}+c \quad \left[c \text{ arbitrary constant}\right]
\end{aligned}$$

এবার ফেরার পালা, u থেকে s-এ, সেখান থেকে t-তে, এবং অবশেষে x-এ। প্রথমে u-কে x দিয়ে লিখে নিই--

$$u=2+3s+s^2=2+3t^{-1}+t^{-2}=\frac{2t^2+3t+1}{t^2}=\frac{2x^4+3x^2+1}{x^4}.$$

অতএব পাচ্ছি

$$\frac{1}{6u^3}=\frac{x^{12}}{6(2x^4+3x^2+1)^3}.$$

তার মানে উত্তর হল (B). ■

যারা খুব খুঁটিয়ে খুঁটিয়ে পড়তে ভালোবাসো, তারা হয়তো একটা ব্যাপারে অস্বস্তিতে পড়ে গেছ। আমরা $\int \frac{3t^6+2t^5}{(2t^2+3t+1)^4}\,dt$ বার করার জন্য $s=\frac{1}{t}$ বসিয়েছিলাম। কিন্তু এখানে তো $t=0$ সম্ভব (মানে integrand-এর domain-এ 0 আছে)। তাহলে কী করে $\frac{1}{t}$ করা গেল? আসলে $s=\frac{1}{t}$ বসানোর সময়ে আমরা খালি $t\neq 0$ নিয়ে কাজ করছিলাম। যেহেতু $t=x^2$ ছিল, তার মানে আমরা যে উত্তর পেলাম সেটা $x\neq 0$-র জন্য ঠিক। তার মানে (B)-এর function-টাকে যদি কোনো $x\neq 0$-তে differentiate করো তবে $\frac{3x^{13}+2x^{11}}{(2x^4+3x^2+1)^4}$ পাবে। কিন্তু প্রশ্নটায় তো $x\neq 0$ বলা ছিল না! তাহলে $x=0$ হলে কী করব? এখানে একটা ব্যাপার আমাদের বাঁচাবে--

রক্ষাকবচ

যদি $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ হয়, যেখানে $f(x)$ হল differentiable, $g(x)$ হল continuous, এবং যাবতীয় $x\neq 0$-র জন্যই $f'(x)=g(x)$ হয়, তবে $f'(0)=g(0)$-ও হতে বাধ্য।

এই ব্যাপারটার প্রমাণ এই বইয়ের পাল্লার বাইরে। কিন্তু যখন আমরা $s=\frac{1}{t}$ বসাচ্ছি, আমরা চুপিচুপি এটা ব্যবহার করছি।

Exercise 11: The integral

$$\int \frac{2x^{12}+5x^9}{(x^5+x^3+1)^3}\,dx$$

is equal to

(A) $\frac{-x^5}{(x^5+x^3+1)^2}+C$

(B) $\frac{x^{10}}{2(x^5+x^3+1)^2}+C$

(C) $\frac{x^5}{2(x^5+x^3+1)^2}+C$

(D) $\frac{-x^{10}}{2(x^5+x^3+1)^2}+C$

(JEE(main)2016)
HINT: আগের অংকটার মতই। চাইলে এখানেও differentiate করে উল্টো পথে এগোতে পারো। সেটাই সহজতম কায়দা।
■

Example 15: If

$$f(x)=\int \frac{5x^8+7x^6}{(x^2+1+2x^7)^2}\,dx \quad (x\geq 0),$$

and $f(0)=0$, then the value of $f(1)$ is

(A) $-\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $-\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{4}$

(JEE(main)2019)
SOLUTION: এই অংকটার ভাষায় সামান্য গোলমাল আছে। একটা indefinite integral মানে হল একটা function-এর set. সুতরাং এখানে $f(x)$ কোনো একটা function নয়, তাই $f(0)=0$ লেখার কোনো মানে হয় না। আসলে বলতে চেয়েছে যে $f(x)$ হল ওই set-এর এমন একজন সদস্য যার জন্য $f(0)=0$ হয়। অর্থাৎ indefinite integral-টা বার করলে যে arbitrary constant-টা পাবে, তার এমন value নিতে হবে যাতে $f(0)=0$ হয়।
যাই হোক, integrand-এ x-এর power-গুলো এত বড় বড় যে, indefinite integral-টা বার করতে partial fraction লাগালে তো মারা পড়ব। তাই এখানেও সেই $t=\frac{1}{x}$-এর শর্টকাট চেষ্টা করব।

$$\int \frac{5x^8+7x^6}{(x^2+1+2x^7)^2}\,dx = -\int \frac{5t^{-8}+7t^{-6}}{(t^{-2}+1+2t^{-7})^2}\frac{dt}{t^2} \quad \left[\text{substituting } t=\tfrac{1}{x}\right]$$

এবার উপর নীচ দু দিককেই t^{14} দিয়ে গুণ করব।

$$= -\int \frac{5t^4+7t^6}{(t^5+t^7+2)^2}\,dt$$

বাঃ, এখানে derivative-এর শর্টকাটটা লাগানো যাবে!

$$= -\int \frac{d(t^5+t^7+2)}{(t^5+t^7+2)^2}$$

$$= \frac{1}{t^5+t^7+2}+c$$

এবার আবার t থেকে x-এ ফেরা।

$$= \frac{1}{x^{-5}+x^{-7}+2}+c$$

$$= \frac{x^7}{x^2+1+2x^7}+c.$$

Since $f(0)=0$, hence $c=0$. So $f(1)=\frac{1}{4}$.

এখানেও কিন্তু সেই রক্ষাকবচটা[2] চুপিচুপি ব্যবহার করেছি, নইলে একই সঙ্গে $t=\frac{1}{x}$ আর $x=0$ নিয়ে কাজ করছি কী করে?
■

Answers

1. $\frac{\tan^{-1}\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{2\,\alpha^3}+\frac{x}{2\,\alpha^2\,x^2+2\,\alpha^4}+c.$ **2.** $\frac{3\,\tan^{-1}\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{8\,\alpha^5}+\frac{5\,\alpha^2\,x+3\,x^3}{8\,\alpha^4\,x^4+16\,\alpha^6\,x^2+8\,\alpha^8}+c.$ **3.** $\frac{\tan^{-1}\left(\frac{4+2\,x}{6}\right)}{54}+\frac{2+x}{18\,x^2+72\,x+234}.$ **4.**
(*i*) $\frac{\log\left(5-2\,x+x^2\right)}{4}+\frac{\tan^{-1}\left(\frac{2\,x-2}{4}\right)}{4}.$ (*ii*) $-\frac{1}{2\,(x^2+1)}.$ (*iii*) $\frac{3\,\tan^{-1}\left(\frac{4\,x-4}{2^{\frac{3}{2}}}\right)}{2^{\frac{7}{2}}}+\frac{-12+23\,x-18\,x^2+6\,x^3}{32\,x^4-128\,x^3+224\,x^2-192\,x+72}.$

5. (*i*) $\int(x+1)\,dx+\int\frac{2x-3}{(x+3)(x+4)^2}\,dx.$ (*ii*) যা ছিল, তাই থাকবে।

6. (*i*) $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)(x^2+1).$ (*ii*) $(x+1)^6.$ (*iii*) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}).$

7.
(*i*) $-\frac{5}{8\,(x-1)}-\frac{550}{x-2}-\frac{125}{(x-2)^2}+\frac{4429}{8\,(x-3)}-\frac{1565}{4\,(x-3)^2}+\frac{883}{2\,(x-3)^3}$ (*ii*) $\frac{7\,x-1}{2\,(x^2+1)}-\frac{3}{x+1}+\frac{1}{2\,(x-1)}.$
(*iii*) $\frac{1-x}{(10+2\,x+x^2)^3}.$

8.
(*i*) $\frac{\log(2+x)}{21}-\frac{\log(x-1)}{3}+\frac{9\,\log(x-5)}{7}.$ (*ii*) $\frac{2\,\log(2\,x-3)}{5}+\frac{\log(1+x)}{10}-\frac{\log(x-1)}{2}.$
(*iii*) $\frac{5\,\log(2+x)}{8}-\frac{7\,\log(3\,x-2)}{24}.$

9. (*i*) $\log 6-\log 3+24.$ (*ii*) $-\frac{\log\left(2+x^2\right)}{2}+\frac{\log\left(1+x^2\right)}{2}+3\,\tan^{-1}x+c.$
(*iii*) $\log\left(1+x+x^2\right)-5\,\log x-\frac{1}{x}+c.$ (*iv*) $\log\left(1+x+x^2\right)+2\,\log\left(x-1\right)-\frac{1}{x-1}+c.$
(*v*) $3\,\log x-\log\left(1+x^2\right)+c.$ (*vi*) $2\,\log\left(5-2\,x+x^2\right)-\frac{5\,\tan^{-1}\left(\frac{2\,x-2}{4}\right)}{2}+2\,\log\left(x-1\right)+2\,x+c.$

[2] খালি এখানে domain-টা পুরো $\mathbb{R}$-এর বদলে $[0,\infty)$.

(*vii*) $\log(1+x)+\tan^{-1}x+\log(x-1)+c$. (*viii*) $2\tan^{-1}x-\log(x-2)+\frac{x^3}{3}+c$.
(*ix*) $\log\left(9+x^2\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+\frac{x^4}{4}-\frac{1}{x}+c$. (*x*) $\tan^{-1}\left(\frac{4+2x}{2}\right)+2\log(x-1)+c$.
(*xi*) $2\log x+\frac{\tan^{-1}x}{2}-\frac{x}{2x^2+2}+c$. (*xii*) $-\log(2+u)+2\log u+4\log(u-1)+c$.
(*xiii*) $2\left(-\frac{\log 6}{4}+\frac{\log 3}{4}+\frac{\log 2}{2}\right)$.

10. (*i*) $\frac{5}{4}\log|x^2-1|-\frac{5}{4}\log(x^4+1)-\frac{3}{4}\tan^{-1}(x^4+1)+c$. (*ii*) $\frac{4}{3}\log|x^3-3|-\log|x^3-2|+c$.

11. (B).

Index